مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هشتم، شماره ۲ (پیاپی ۲۹)، تابستان ۹۰، ص ص ۶۴-۵۵
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

روش مستقل از معکوس وزن دار برای حل معادله مقدار ویژه تعمیم یافته

مرتضی کاردل[1]، امیرحسین رفاهی شیخانی*[2]
[1]دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زابل، گروه ریاضی، زابل، ایران
[2]دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان، گروه ریاضی، لاهیجان، ایران

رسید مقاله: ۸۹/۳/۲۹
پذیرش مقاله: ۸۹/۱۰/۱۵

چکیده

روش های زیادی برای حل معادله مقدار ویژه تعمیم یافته وجود دارد. برخی از روش ها کمتر از سطح انتظار مقادیر ویژه را تعیین می کنند و برخی دیگر بیش از تعداد مورد نیاز، مقادیر ویژه را محاسبه می کنند. در این مقاله به بیان روش مستقل از معکوس برای محاسبه مقدار ویژه تعمیم یافته پرداخته وبا استفاده از روش های تصویرسازی و ترکیب آن ها با اگوریتم مستقل از معکوس دو روش جدید برای محاسبه مقادیر ویژه ارایه می دهیم.کارآیی این الگوریتم ها را با حل مثال های عددی نشان دادیم. نتایج نشان میدهند که روش های جدید از سرعت و دقت خوبی برخوردارند.

کلمات کلیدی: متقارن، مقدار ویژه، زیرفضای کریلف، وزن دار.

۱ مقدمه

مساله مقدار ویژه تعمیم‌یافته برای ماتریس های مربعی A و B که حل معادله $AX = \lambda BX$ است، یک موضوع متمرکز در جبرخطی عددی می‌باشد. محاسبه مقادیر ویژه از طریق حل صریح معادله مفسر $\det(A - \lambda B) = 0$ به جز در موارد ویژه راه حل خوبی نمی‌باشد، چون که ضرایب معادله مفسر را نمی‌توان از طریق محاسبه دترمینان با روش های پایدار عددی محاسبه نمود. لذا حتی اگر معادله مفسر به طور دقیق تعیین شود، آن گاه محاسبه ریشه‌های آن با دقت زیاد ممکن است از ناپایداری بالایی برخوردار باشد. این مطلب هنگامی بیشتر نمود پیدا می‌کند که ماتریس های مربعی از نظر بعد بزرگ باشند. برخی از روش ها مانند روش تکرار خارج قسمت رایلی، کمتر از سطح انتظار مقادیر ویژه را تعیین می کنند و برخی دیگرمانند روش تکراری QZ بیش از تعداد مورد نیاز، مقادیر ویژه را محاسبه می کنند.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: *ah_refahi@yahoo.com*

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

اما روش های ارایه شده در این مقاله این امکان را فراهم می‌سازد تا دقیقاً به تعداد مورد نیاز مقادیر ویژه را محاسبه نماییم. این کار علاوه بر افزایش دقت، هزینه و زمان محاسبات را کاهش می‌دهد. برای این منظور روش های تصویرسازی که از آن جمله روش لانزوس می‌باشد را بیان می کنیم. این روش زوج مربعی (A,B) را که از مرتبه n می‌باشد را با یک زوج مربعی از مرتبه m $(m \le n)$، متشابه می‌سازد. این روش ها از این نظر حایز اهمیت هستند که در عمل ما به تمام مقادیر ویژه تعمیم‌یافته زوج (A,B) نیاز نداریم. بلکه فقط تعداد مشخصی از مقادیر ویژه مورد نظر است.

تعریف ۱ فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند. عدد $\lambda \in c$ را یک مقدار ویژه تعمیم یافته زوج (A,B) می‌نامیم، هر گاه بردار $x \ne 0$ یافت شود به طوری که $AX = \lambda BX$. بردار X بردار ویژه تعمیم یافته زوج (A,B) نامیده می‌شود.

مجموعه همه مقادیر ویژه طیف نامیده می‌شود.

$$AX = \lambda BX \to (A-\lambda B)X = 0 \qquad \text{و} \qquad X \ne 0$$

چند جمله‌ای مشخصه زوج (A,B) $\leftarrow$ $\det(A-\lambda B) = 0 \to (-1)^n \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0$

بنابراین مقادیر ویژه زوج (A,B) ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه زوج (A,B) می‌باشند.

۲ روش مستقل از معکوس با استفاده از زیر فضای کریلف

در این روش با یک زیر فضای کریلف متغیر که در هر تکرار تغییر می کند به دنبال کوچکترین (بزرگترین) مقدار ویژه جفت زوج (A, B) هستیم که $B_{n\times n}, A_{n\times n}$، متقارن و B معین مثبت می باشد.

اساس این روش ، روش تکرار خارج قسمت رایلی می باشد. به عبارت دیگر هدف مینیمم کردن خارج قسمت رایلی روی یک زیر فضای کریلف معین در هر تکرار می باشد که آن زیر فضای کریلف معین نتیجه یک انتقال مناسب می باشد.

فرض کنید (ρ_0, X_0) یک تقریب اولیه برای کوچکترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن برای زوج (A,B) باشد.

بر اساس روش تکراری خارج قسمت رایلی تقریب بعدی و بهتر نسبت به x_0، یعنی x_1 از حل دستگاه:

$$(A-\rho_0 B)x_1 = Bx_0$$

پیدا می شود. اما یکی از روشهای موجود برای حل این دستگاه استفاده از روش های زیر فضای کریلف می باشد. اساس کار یافتن یک پایه برای زیر فضای کریلف.

$$K_m = K_m(A-\rho_0 B, x_0) = Span\{x_0, (A-\rho_0, B)x_0, \ldots, (A-\rho_0 B)^m x_0\}$$

می باشد. که $1 \le m \le n$ (به [۵] مراجعه شود).

لذا تلاش خود را برای یافتن یک پایه برای K_m متمرکز می کنیم. با ادامه روند بالا به الگوریتم زیر می رسیم که به آن روش مستقل از معکوس با استفاده از زیر فضای کریلف می گوییم.

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

الگوریتم روش مستقل از معکوس

$Algoritm 1: Invers\ free\ Krylov\ Subspace\ method\ for\ (A,B)$

$input\ m \geq 1\ and\ initial\ approximation\ x_0\ with\ \|x_0\| = 1$

$$\rho_0 = \rho(x_0) = \frac{x_0^T A x_0}{x_0^T B x_0}$$

$For \quad K = 0,1,.....\ until\ Convergence\ do$

$Construct\ a\ basis\ Z_m = [z_0,...,z_m]\ for\ K_m = Span\{x_k, (A-\rho_k B)x_k,...,(A-\rho_k B)^m x_k\}$

$Form\ A_m = Z_m^T (A-\rho_k B) Z_m\ and\ B_m = Z_m^T B Z_m$

$Find\ \ the\ Smallest\ eigenpair\ (u_1, v_1)\ for\ (A_m, B_m)$

$\rho_{k+1} = \rho_k + u_1\ \ and\ \ x_{k+1} = Z_m v_1$

$end\ \ do$

در این الگوریتم محاسبات را بر روی زوج انتقال یافته ($A-\rho_k B, B$) انجام می دهیم و در هر تکرار ρ_{k+1} را از روی ρ_k محاسبه می کنیم. که این معادل است با محاسبه مستقیم ρ_{k+1} (ρ_{k+1} کوچکترین مقدار ویژه زوج ($Z_m^T A Z_m, Z_m^T B Z_m$) می باشد.

با توجه به الگوریتم ۱ ملاحظه می شود که در این الگوریتم یک تکرار اصلی یا خارجی وجود دارد که تا پیدا کردن یک تقریب خوب ادامه دارد. اما در هر تکرار خارجی یک تکرار داخلی وجود دارد که وابسته به m می باشد و منجر به ساختن یک پایه متعامد برای K_m در هر تکرار خارجی می شود. روش های متفاوتی برای ساختن یک پایه متعامد برای K_m وجود دارد. استفاده از این روش های متفاوت، تاثیری بر روی نتایج حاصل از الگوریتم (۱) ندارد. اما ممکن است پایداری عددی و پیچیدگی محاسباتی متفاوتی داشته باشند.

۳ همگرایی روش تکراری مستقل از معکوس

قضیه ۱ فرض کنید $\lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ مقادیر ویژه تعمیم یافته زوج (A,B) باشد. (ρ_{k+1}, x_{k+1}) یک زوج تقریب به دست آمده از (ρ_k, x_k) به وسیلهٔ الگوریتم (۱) باشد. همچنین فرض کنید $\delta_1 < \delta_2 \leq ... \leq \delta_n$ مقادیر ویژه ماتریس $A-\rho_k B$ و u_1 بردار یکه ویژه متناظر با δ_1 باشد و $\lambda_1 < \rho_k < \lambda_2$. در این صورت داریم

$$\rho_{k+1} - \lambda_1 \leq (\rho_k - \lambda_1)\varepsilon_m^2 + 2(\rho_k - \lambda_1)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_m \left(\frac{\|B\|}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{2}} + \delta_k$$

که

$$0 \leq \delta_k \equiv \rho_k - \lambda_1 + \frac{\delta_1}{u_1^T B u_1} = O((\rho_k - \lambda_1)^2)$$

و

$$\varepsilon_m = \min_{p \in P_m\ m, p(\delta_1)=1} \ \max_{i \neq 1} \ |P(\delta_i)|$$

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

که P_m مجموعه همه چند جمله ای های حداکثر از درجهٔ m می باشد.

برهان قرار می دهیم $C = A - \rho_k B$ و $K_m = \{p(c)x_k, p \in P_m\}$ در تکرار k ام از الگوریتم(۱) داریم:

$$\rho_{k+1} = \min_{0 \neq u \in k_m} \frac{u^T A u}{u^T B u} = \rho_k + \min_{0 \neq u \in k_m} \frac{u^T (A - \rho_k B) u}{u^T B u}$$
$$\rho_k + \min_{p \in P_m, p(c)x_k \neq 0} \frac{x_k^T p(C)\ C\ p(C)\ x_k}{x_k^T p(C)\ B\ \ p(C)\ x_k}$$

اما چون $A - \rho_k B$ متقارن است، لذا قطری شدنی است. یعنی ماتریس متعامد U چنان موجود است که $A - \rho_k B = U \sum U^T$. اما چون مقادیر ویژه $A - \rho_k B$ ، δ_1، δ_2،...، δ_n می باشد. لذا $\sum$ یک ماتریس قطری با درایه های روی قطر $\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$ می باشد.

همچنین فرض کنید q مینیمم چند جمله ای هایی در P_m باشد که $q(\delta_1) = 1$ (چنین چند جمله ای هایی وجود دارند زیرا اگر $P(x)$ چند جمله ای مشخصهٔ $A - \rho_k B$ باشد آن گاه کافی است قرار دهیم $q(x)=P(x)+1$ در این صورت $(q(\delta_1) = 1$. قرار می دهیم $\varepsilon_m = \max_{i \neq 1} |q(\delta_i)|$. بنابراین $\varepsilon_m < 1$ می باشد. زیرا در غیر این صورت چند جمله ای با درجه کمتر از درجه q وجود دارد که $q(\delta_1) = 1$ باشد و این یک تناقض است.

بنابراین داریم:

$$\rho_{k+1} \leq \rho_k + \frac{x_k^T q(C) C q(C)\ x_k}{x_k^T\ \ q(C) B q(C)\ x_k}$$
$$= \rho_k + \frac{x_k^T q(U \sum U^T) U \sum U^T q(U \sum U^T) x_k}{x_k^T q(U \sum U^T) B q(U \sum U^T) x_k}$$
$$= \rho_k + \frac{x_k^T U q^2(\sum) \sum U^T x_k}{x_k^T U q(\sum) B_1\ q(\sum)\ U^T x_k}$$

$$= \rho_k + \frac{y^T q^2(\sum) \sum y}{y^T q(\sum) B_1 q(\sum) y} \qquad (۱)$$

که در رابطهٔ فوق:

$B_1 = U^T B U$ و $y = U^T x_k$

فرض کنید $y = [y_1, y_2, ..., y_n]^T$ و $\hat{y} = [0, y_2, ..., y_n]^T$ و $e_1 = [1,0,0,...,0]^T$ آن گاه داریم:

$$y^T q(\sum) B_1\ q(\sum) y = (y_1 e_1 + \hat{y})^T q(\sum) B_1 q(\sum)(y_1 e_1 + \hat{y})$$
$$= y_1^2 q(\delta_1)^2 e_1^T B_1 e_1 + 2 y_1 q(\delta_1) e_1^T B_1 q(\sum) \hat{y}$$
$$+ \hat{y}^T q(\sum) B_1 q(\sum) \hat{y} = y_1^2 \beta_1^2 + 2 y_1 \beta_2 + \beta_3^2$$

که

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

$$\beta_1^2 = e_1^T B_1 e_1 = u_1^T B u_1$$
$$\beta_3^2 = \hat{y}^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma)\hat{y} \le \max_{i\neq 1} q(\delta_i)^2 \| B_1 \| \, \| \hat{y} \|^2$$
$$= \varepsilon_m^2 \| B \| \| \hat{y} \|^2$$

و $\beta_2 = e_1^T B_1 q(\Sigma)\hat{y}$

بنابراین داریم:

$$\beta_1^2 \beta_3^2 = e_1^T B_1 e_1 \hat{y}^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma)\hat{y}$$
$$(\beta_1 \beta_3)^2 = |(\beta_1 \beta_3)^2| \ge | e_1^T B_1 e_1 \hat{y}^T q(\Sigma) B_1 \; q(\Sigma) \; \hat{y}|$$
$$\ge | e_1^T B_1 q(\Sigma)\hat{y} |^2 = | \beta_2 |^2$$
$$\Rightarrow | \beta_2 | \le \beta_1 \; \beta_3$$
$$0 = x_k^T (A - \rho_k B) x_k = y^T U^T (A - \rho_k B) U y$$
$$= y^T \Sigma y$$

لذا داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i y_i^2 = 0$$
$$| \delta_1 | \, y_1^2 \ge -\delta_1 y_1^2 = \sum_{i\neq 1} \delta_i y_i^2 \ge \delta_2 \| \hat{y} \|^2$$

بنابراین:

$$\beta_3 \le \varepsilon_m \| B \|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{| \delta_1 |}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{2}} | y_1 | \qquad (۲)$$

از طرف دیگر داریم:

$$y^T q^2(\Sigma) \Sigma y = \sum_i \delta_i q^2(\delta_i) y_i^2 \le \sum_i \delta_i y_i^2 = y^T \Sigma y = 0$$

و

$$\hat{y}^T q^2(\Sigma) \Sigma \hat{y} = \sum_{i\neq 1} \delta_i q^2(\delta_i) y_i^2 \le \varepsilon_m^2 \sum_{i\neq 1} \delta_i y_i^2 \qquad (۳)$$
$$= \varepsilon_m^2 \; | \delta_1 | \, y_1^2$$

بنابراین داریم:

$$\frac{y^T q^2(\Sigma) \Sigma y}{y^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) y} \le \frac{y_1^2 \delta_1 + \hat{y}^T q^2(\Sigma) \Sigma \hat{y}}{y_1^2 \beta_1^2 + 2 | y_1 | \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2}$$
$$= \frac{\delta_1}{\beta_1^2} - \frac{\delta_1}{\beta_1^2} \frac{2 | y_1 | \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2}{y_1^2 \beta_1^2 + 2 | y_1 | \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2} + \frac{\hat{y}^T q^2(\Sigma) \; \Sigma \hat{y}}{y_1^2 \beta_1^2 + 2 | y_1 | \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2}$$
$$\le \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} \frac{2 | y_1 | \beta_1 \beta_3}{y_1^2 \beta_1^2} + \frac{\hat{y}^T q^2(\Sigma) \; \Sigma y}{y_1^2 \beta_1^2}$$

حال با توجه به روابط (۲) و (۳) داریم:

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

$$\leq \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} \frac{2\,|\,y_1\,|\,\beta_1 \quad \varepsilon_m \,\|\,B\,\|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|\,\delta_1\,|}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} |\,y_1\,|}{y_1^2 \beta_1^2} \tag{۴}$$

$$+ \frac{\varepsilon_m^2\,|\,\delta_1\,|\,y_1^2}{y_1^2 \beta_1^2} \leq \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + 2\left(\frac{|\,\delta_1\,|}{\beta_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_m \left(\frac{\|\,B\,\|}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\,\delta_1\,|}{\beta_1^2} \varepsilon_m^2$$

حال با ترکیب روابط (۱) و (۴) داریم:

$$0 \leq \rho_{k+1} - \lambda_1 \leq \rho_k - \lambda_1 + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + 2\left(\frac{|\delta_1|}{\beta_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_m \left(\frac{\|B\|}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\delta_1|}{\beta_1^2} \varepsilon_m^2$$

$$\leq \rho_k - \lambda_1 + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + 2\,(\rho_k - \lambda_1)^{\frac{3}{2}}\, \varepsilon_m \left(\frac{\|B\|}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} (\rho_k - \lambda_1)\varepsilon_m^2$$

حال با قرار دادن $\rho_k - \lambda_1 + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + \delta_k = O\left((\rho_k - \lambda_1)^2\right)$ اثبات کامل می‌شود.

لازم به ذکر است که می‌توان برای ε_m که در قضیه(۱) بیان شد، یک کران بالا به صورت زیر برحسب δ_iها بیان کرد. (به[۶] مراجعه کنید):

$$\varepsilon_m \leq 2\left(\frac{1-\sqrt{\psi}}{1+\sqrt{\psi}}\right)^m \tag{۵}$$

که:

$$\psi = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_n - \delta_1}$$

بنابراین سرعت همگرایی الگوریتم (۱) به میزان پراکندگی مقادیر ویژه $(A - \rho_k B)$ که همان δ_iها هستند بستگی دارد. این برجستگی اساسی و مهم این الگوریتم به ما این اجازه را می‌دهد که سرعت همگرایی را با استفاده از تبدیلات معادل (پیش شرط) بالا ببریم. این تبدیلات δ_iها را تغییر می‌دهند اما مقادیر ویژه زوج (A,B) هیچ تغییری نمی‌کنند. نکته قابل توجه دیگر که در رابطه (۵) ملاحظه می‌شود این است که با افزایش m سرعت همگرایی افزایش پیدا می‌کند و آزمایش‌های عددی، نیز بیانگر همین مطلب می‌باشد. همچنین می‌توانیم کران بالای رابطه (۵) را نیز برحسب مقادیر ویژه $A - \lambda_1 B$ به جای مقادیر ویژه $(A - \rho_k B)$ بیان کنیم که منجر به شکل‌گیری لم زیر می‌شود.

لم۱ فرض کنید $0 = \gamma_1 < \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_n$ مقادیر ویژه $(A - \lambda_1 B)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\rho_{k+1} - \lambda_1 \leq 4\left(\frac{1-\sqrt{\psi_\circ}}{1+\sqrt{\psi_\circ}}\right)^{2m} (\rho_k - \lambda_1) + 4\left(\frac{1-\sqrt{\psi_\circ}}{1+\sqrt{\psi_\circ}}\right)^{m} \left(\frac{\|B\|}{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2}} (\rho_k - \lambda_1)^{\frac{3}{2}} + O\left((\rho_k - \lambda_1)^2\right)$$ که

در آن $\psi_\circ = \frac{\gamma_2}{\gamma_n}$ می‌باشد.

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

٤ محاسبه P کوچکترین (بزرگترین) مقدار ویژه زوج (A,B) با استفاده از روش تهی‌سازی

واضح است که برای پیدا کردن بزرگترین مقدار ویژهٔ تعمیم یافته زوج (A,B) کافی است روش مستقل از معکوس زیر فضای کریلف را برای زوج $(-A,B)$ اجرا کنیم.

فرض کنید P زوج ویژهٔ (A,B) محاسبه شده باشد. ($1<P<n$) همچنین فرض کنید V_P ماتریسی باشد که ستونهای آن P بردار ویژهٔ محاسبه شدهٔ (A,B) و Λ_p یک ماتریس قطری باشد که عناصر روی قطر آن P مقدار ویژهٔ زوج (A,B)باشد.از طرفی می دانیم که بردارهای ویژه زوج(A,B)، B متعامدند. لذا داریم:

$$V_P^T B V_P = I \tag{۶}$$

$$A V_P = B V_P \Lambda_P \tag{۷}$$

حال اگر قرار دهیم:

$$(A_p, B) = (A + (BV_p)\sum(BV_p)^T, B) \tag{۸}$$

که $\sum = diag\{\delta_i - \lambda_i\} i = 1,\ldots,p$ و $\delta_i \geq \lambda_{p+2}$

حال با توجه به روابط (۶) و (۷) واضح است که مقادیر ویژهٔ (۸) اجتماع ۲ مجموعهٔ $\{\lambda_{p+1},\ldots\lambda_n\}$ و $\{\delta_1,\ldots\delta_p\}$ می باشد، بنابراین کوچکترین مقدار ویژهٔ (۸)، λ_{p+1} می باشد. لذا با بکار بردن الگوریتم مستقل از معکوس پیش شرط شدهٔ زیر فضای کریلف (الگوریتم (۱)) بر روی زوج (۴-۳)، λ_{p+1} مشخص می شود. یعنی با فرض داشتن P کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) می توان $P+1$ امین مقدار ویژه را محاسبه کرد.

مثال ۱ ماتریس های A و B را به صورت زیر در نظر بگیرید.

جدول ۱. نحوه عملکرد الگوریتم مستقل از معکوس (Arnoldi) برای پیداکردن کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) به ازای مقادیر مختلف m

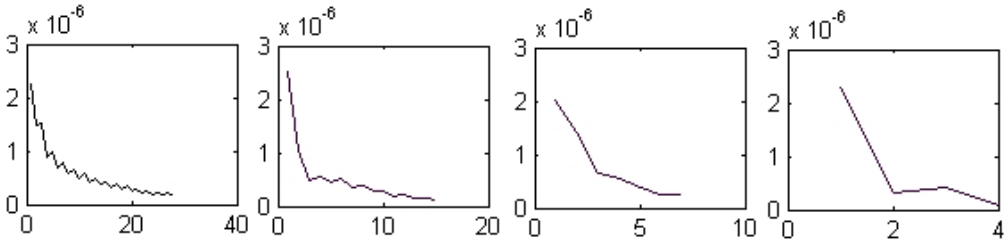
m	Inner itration	Outer itration	Total of inner itration	Time
۴	۲۸	۴۸	۱۱۲	۱۹/۸۶
۶	۱۵	۴۷	۹۰	۱۳/۷۰
۸	۷	۴۷	۵۶	۹/۳۶
۱۰	۵	۴۷	۵۰	۹/۰۴
۱۲	۴	۴۵	۴۸	۸/۰۶

$$A = \begin{bmatrix}
3 & 1.2 & 0.42 & 0.8 & 0.3 & 0.8 & & & & & & & & & & \\
1.2 & 4 & 1.2 & 0.42 & 0.8 & 0.3 & & & & & & & & & & \\
0.42 & 1.2 & 5 & 1.2 & 0.42 & 0.8 & & & & & & & & & & \\
0.8 & 0.42 & 1.2 & 6 & 1.2 & 0.42 & & & & & & & & & & \\
0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 & 7 & 1.2 & & & & & & & & & & \\
0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 & 8 & & & & & & & & & & \\
 & 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 & & & & & & & & & & \\
 & & 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 & & & & & & & & & & \\
 & & & 0.8 & 0.3 & 0.8 & & & & & & & 0.8 & & & \\
 & & & & 0.8 & 0.3 & & & & & & & 0.3 & 0.8 & & \\
 & & & & & 0.8 & & & & & & & 0.8 & 0.3 & 0.8 & \\
 & & & & & & & & & & & & 0.42 & 0.8 & 0.3 & \\
 & & & & & & & & & & & & 1.2 & 0.42 & 0.8 & \\
 & & & & & & 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 & 1000 & 1.2 & 0.42 & & \\
 & & & & & & & 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 & 1001 & 1.2 & & \\
 & & & & & & & & 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 & 1002 & &
\end{bmatrix}_{1000\times1000}$$

$$B = Diag(2,3,\ldots,1000,1001)_{1000\times1000}$$

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) را با به کارگیری الگوریتم مستقل از معکوس با شرط توقف $\|r_k\| \le 10^{-7}$ که $r_k = (Ax_k - \lambda_k Bx_k)/\|x_k\|$ محاسبه کردیم. در شکل(۱) تعداد تکرارهای داخلی مورد نیاز برای رسیدن به دقت مطلوب به ازای m=4,6,8,12 نشان داده شده است.



شکل ۱. تعداد تکرارهای داخلی مورد نیاز برای رسیدن به دقت مطلوب به ازای m=4,6,8,12 از چپ به راست

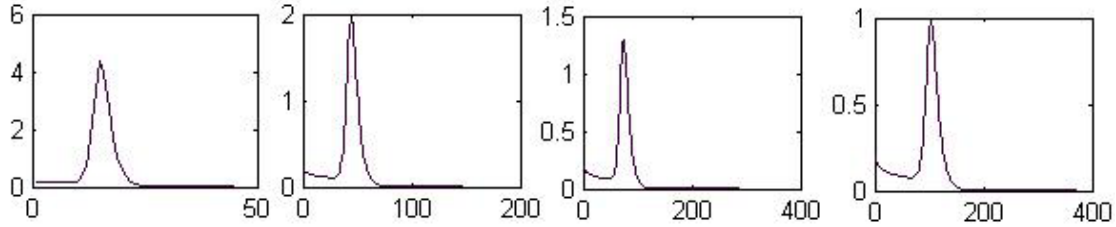
مشاهده می‌کنید که با افزایش m، تعداد تکرارهای داخلی کاهش می‌یابد.اما این بدین معنی نیست که m را هر چقدر که بخواهیم، افزایش دهیم.زیرا در این صورت تعامد موجود بین اعضای پایه از بین می‌رود وتکرارهای داخلی افزایش می‌یابد. جدول (۱) را ببینید.

مشاهده می‌کنید که m=12، مناسب‌ترین m می‌باشد. حال با به کارگیری الگوریتم مستقل از معکوس و تهی-سازی چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) را محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول (۴-۲) نشان داده شده است.

جدول ۲. نحوه عملکرد الگوریتم مستقل از معکوس (Arnoldi) برای پیداکردن چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) با دقت 10^{-7}

p	m	Inner itration	Outer itration	Time	λ_P
۱	۱۲	۴	۴۷	۸/۰۶	۰/۵۸۲۱۵
۲	۱۲	۴	۱۴۹	۷۲/۶۷	۰/۸۲۶۶۷
۳	۱۲	۴	۲۸۹	۱۴۱/۱۸	۰/۸۹۱۵۱
۴	۱۲	۴	۳۷۴	۱۷۷/۱۱	۰/۹۲۱۱۶

در شکل (۲)، تعداد تکرارهای خارجی مورد نیاز برای محاسبه چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) با دقت 10^{-7} نشان داده شده است .

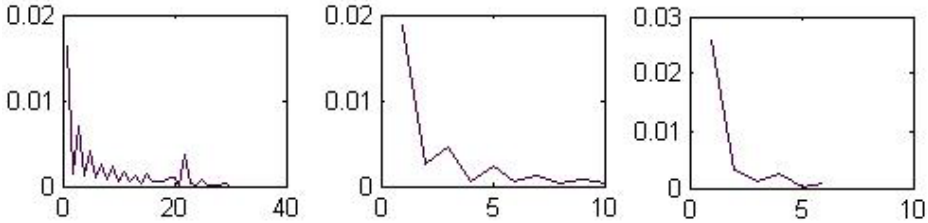


شکل ۲. تعداد تکرارهای خارجی مورد نیاز برای محاسبه چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) با دقت 10^{-7}

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

۵ روش مستقل از معکوس وزن دار

حال برای ساختن یک پایه متعامد در الگوریتم مستقل از معکوس از روش ***W-Arnoldi*** [1]، که یکی از روش های زیر فضای کریلف می‌باشد، استفاده می‌کنیم. کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) را با به کارگیری الگوریتم مستقل از معکوس با شرط توقف $\|r_k\| \le 10^{-7}$ که $r_k = (Ax_k - \lambda_k Bx_k)/\|x_k\|$ محاسبه کردیم. در شکل(۳) تعداد تکرارهای داخلی مورد نیاز برای رسیدن به دقت مطلوب به ازای m=2,4,6 نشان داده شده است.



شکل۳. تعداد تکرارهای داخلی مورد نیاز برای رسیدن به دقت مطلوب به ازای m=2,4,6 از چپ به راست

جدول ۳. نحوه عملکرد الگوریتم مستقل از معکوس (w-Arnoldi) برای پیداکردن کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) به ازای مقادیر مختلف m

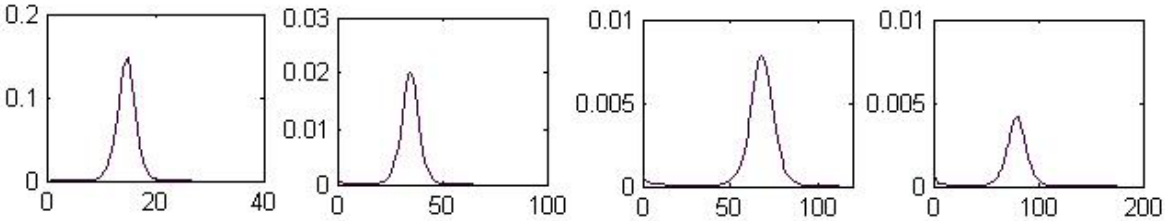
m	Inner itration	Outer itration	Total of inner itration	Time
۲	۳۰	۲۹	۶۰	۵۳/۰۴
۴	۱۰	۲۸	۴۰	۱۸/۸۷
۶	۶	۲۷	۳۶	۱۲/۴۹

مشاهده می‌کنید که m=6، مناسب‌ترین m می‌باشد.حال با به کارگیری الگوریتم مستقل از معکوس و تهی‌سازی چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) را محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول (۴) نشان داده شده است.

جدول ٤. نحوه عملکرد الگوریتم مستقل از معکوس (w-Arnoldi) برای پیداکردن چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) با دقت 10^{-7}

p	m	Inner itration	Outer itration	Time	λ_P
۱	۶	۶	۲۷	۱۲/۴۹	۰/۵۸۲۱۵
۲	۶	۶	۶۵	۴۶/۰۹	۰/۸۲۶۶۷
۳	۶	۶	۱۱۳	۸۰/۵۷	۰/۸۹۱۵۱
۴	۶	۶	۱۷۷	۱۲۵/۶۷	۰/۹۲۱۱۶

در شکل ۴، تعداد تکرارهای خارجی مورد نیاز برای محاسبه چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) با دقت 10^{-7} نشان داده شده است .



شکل٤. تعداد تکرارهای خارجی مورد نیاز برای محاسبه چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج (A,B) با دقت 10^{-7}

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]

مقایسه جدول های ۲ و ۳ نشان می‌دهد که تعداد تکرارها و زمان محاسبات روش مستقل از معکوس (w-$Arnoldi$) به مراتب کمتر از روش مستقل از معکوس ($Arnoldi$) است.جدول ۵ را ببینید.

جدول ۵. مقایسه روش های Arnoldi-inverse free method و W-Arnoldi-inverse free method برای محاسبه چهارتا کوچکترین مقدار ویژه تعمیم‌یافته زوج (A,B) با دقت 10^{-7}

	m	Outer itration	Time
Arnoldi-inverse free method	۱۲	۸۵۹	۳۹۸/۹۱
W-Arnoldi-inverse free method	۶	۳۸۲	۲۶۵/۶۳

٦ نتیجه گیری

روش های ارایه شده در([2]،[3]،[4]) دارای کاستی هایی می باشند، بدین معنا که بعضی از آن ها کمتر از حد انتظار و بعضی دیگر بیش از حد انتظار مقادیر ویژه را محاسبه می کنند. لذا در این مقاله برای حل این شکل به بیان روش های زیر فضای کریلف پرداختیم. مشاهده نمودیم که در روش مستقل از معکوس با محاسبه صریح زوج نرمال، این مشکل برطرف شد و در نهایت با استفاده از معادلات تبدیل مناسب در روش مستقل از معکوس، مرتبه ی همگرایی روش را که قبلا یک بود به دو افزایش پیدا کرد و مقادیر ویژه ی زوج (A,B) با دقت بسیار بالایی محاسبه شد. اما دیدیم که در بین روش های مستقل از معکوس، روش مستقل از معکوس وزن دار مقادیر ویژه را با سرعت بیشتری محاسبه می‌کرد. لذا در حالت کلی که ماتریس های A,B بزرگ و Sparse می باشند، روش مستقل از معکوس وزن دار برای محاسبهٔ مقادیر ویژه تعمیم یافته توصیه می شود.

منابع

[1] Essai, A., (1998). Weighted Fom and GMRES for solving nonsymmetric linear systems, Numer. Algorithm 18.277-292.

[2] Morgen, B., (1996). Restarting the Arnoldi method for large nonsymmetric eigenvalue problems, math. Compute. 1213-1230.

[3] Stathopoulos, A., Saad, Y., K.WU, (1998). Dynamic thick Restarting of the Daridson and the implicitly restarted Arnoldi Algorithm, SIAM J.Sci. Compute. 19. 227-245.

[4] Lehoucq, R. B., (1995). Analysis and implementation of an implicitly restarted Arnoldi interation. Ph. D. thesis, Department of computational and Applied Mathematics, Ric University, TR 95-13.

[5] Golub, H., YE, Q., An Inverse Free Preconditioned Krylov Subspace Method for Symmetric Generalized Eigenvalue problems, SIAM J. SCI. compute, Vo1.24, No.1, pp.312-334

[6] Meurant, G., (1999). Computer Solution of Large Linear System, Elsevier, Armsterdam.

[Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-09-16]