

برآورد بهینه پارامتر تنش- مقاومت تحت نمونه‌های سانسور شده نوع دوم در توزیع پواسون- نمایی

احمدرضا زنبوی^۱، کریم زادع^{۲*}، احسان زنبوی^۳، سهیل شکری^۴

۱- دانشجوی دکتری، گروه آمار، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

۲- استادیار، گروه آمار، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

۳- استادیار، گروه علوم پایه، واحد نورآباد مسمنی، دانشگاه آزاد اسلامی، نورآباد مسمنی، ایران

۴- استادیار، گروه آمار، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۹ اردیبهشت ۱۴۰۲

پذیرش مقاله: ۹ مهر ۱۴۰۲

چکیده

در این مقاله، بهینه‌سازی پارامتر تنش- مقاومت تحت نمونه‌های سانسور شده نوع دوم برای توزیع پواسون- نمایی با پارامترهای شکل یکسان مورد بررسی قرار گرفته است. در این مطالعه، برآورد گرهای بیزی با استفاده از زنجیره مارکوف مونت کارلو به منظور بهینه‌سازی پارامتر تنش- مقاومت به کار گرفته شده‌اند. همچنین، برای مقایسه و بررسی کارایی این برآورد گرهای، یک مطالعه شبیه سازی انجام شده است و نتایج حاصل از برآورد گرهای پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت مبتنی بر نمونه‌های سانسور شده تحت توابع زیان با سایر برآورد گرهای مقایسه شده‌اند. در انتها، برای تحلیل و بررسی کاربرد برآورد گرهای پیشنهادی، از مجموعه‌ای از داده‌های واقعی استفاده شده است.

کلمات کلیدی: برآورد بیز، توزیع پواسون- نمایی، برآورد ماکسیمم درستنایی، سانسور شده نوع دوم، تابع زیان خطی نمایی، پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت.

۱ مقدمه

تنش مقاومت، در مهندسی مواد، به ویژگی‌هایی اطلاق می‌شود که شانگر قدرت و مقاومت یک ماده در برابر تنش‌های مختلف است. این تنش‌ها شامل تنش کششی، تنش فشاری، تنش خمشی و تنش برشی می‌شوند. در فرآیندهای ساخت و استفاده از مواد، تحلیل و بهینه‌سازی تنش‌های مقاومتی ضروری است. بهینه‌سازی در زمینه تنش مقاومت از اهمیت بالایی برخوردار است. با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی، می‌توان عوامل موثر بر تنش مقاومت را شناسایی کرده و در نهایت طراحی و ساخت موادی را انجام داد که دارای تنش مقاومت بهینه باشند. این شامل انتخاب مواد مناسب، بهینه‌سازی ساختار داخلی ماده، استفاده از فرآیندهای تولید بهینه و محاسبات و

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Karim.zare@yahoo.com

شبیه‌سازی‌های دقیق برای تحلیل تنش‌ها و تعیین رفتار ماده در شرایط مختلف می‌شود. مدل تنش- مقاومت یکی از مهم‌ترین مدل‌های قابلیت اطمینان است که کاربردهای زیادی در حوزه‌های مختلف از جمله علوم مهندسی، پژوهشی و صنعتی دارد. این مدل به بررسی استقامت مؤلفه مورد نظر در برابر فشار وارد بر آن می‌پردازد که میزان فشار واردہ یک متغیر تصادفی است. در حال حاضر مدل تنش- مقاومت مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است، به ویژه برای برآورد پارامتر $R = P(Y < X)$ که در آن X و Y متغیر تصادفی مستقل هستند. در یک سیستم X نماد مقاومت و Y نماد تنش وارد بر آن در نظر گرفته می‌شود و پارامتر R به عنوان پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت تعریف می‌شود. بر طبق این تعریف اگر تنش وارد بر سیستم از مقاومت سیستم بیشتر باشد، سیستم با شکست روپرور می‌شود. به عبارت دیگر سیستم تا زمانی با موفقیت به عملکرد خود ادامه می‌دهد که $X > Y$ باشد، یعنی سیستم مقاومت لازم برای غلبه بر تنشی که در معرض آن قرار گرفته را داشته باشد.

مدل تنش- مقاومت اولین بار توسط بیرن‌باو [۱] مطرح شد و بعداً توسط بیرن‌باوم و مک کارتی [۲] گسترش یافت. پژوهش‌های بسیاری در رابطه با پارامتر قابلیت اطمینان تنش- مقاومت وجود دارد. مساله برآورد R به طور گسترده‌ای تحت فرضیات توزیعی مختلف روی X و Y برای انواع گوناگونی از داده‌ها مثل داده‌های کامل و داده‌های سانسور شده مورد مطالعه قرار گرفته است. برای اطلاع بیشتر در مورد پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت و کاربرد آن می‌توان به کوتز و همکاران [۳] مراجعه کرد. هم‌چنین در مورد تاریخچه پارامتر R می‌توان به [۴] مراجعه کرد. نادب و ترابی [۵] یک روش کلی برای انجام آزمون نیکوبی برآش برای خانواده توزیع‌های مکان- مقیاس با استفاده از داده‌های سانسور شده فراینده نوع دوم ارایه دادند و ویژگی‌های آن را بررسی کردند. کهنه‌سال و همکاران [۶] برآورد بیزی پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت، در توزیع لوماکس، تحت نمونه‌های سانسور فراینده پیوندی را در سه حالت بررسی کردند. هم‌چنین محققانی چون بالاکریشنان و همکاران [۷و۸]، پاکیاری و بالاکریشنان [۹ و ۱۰]، وانگ [۱۱] در زمینه آزمون نیکوبی برآش با به کارگیری داده‌های سانسور شده و به ویژه سانسور فراینده نوع دوم به منظور صرفه‌جویی در وقت و هزینه مطالعاتی انجام داده‌اند. قابل ذکر است که جهت مطالعه بیشتر در زمینه سانسور فراینده نوع دوم می‌توان به بالاکریشنان و آگاروالا [۱۲] مراجعه کرد.

در آزمایش‌های طول عمر و قابلیت اطمینان، موارد زیادی موجود دارد که واحدهای آزمایشی قبل از مشاهده زمان خرابی یا شکست آنها از آزمون حذف یا کنار گذاشته می‌شوند که این حذف ممکن است به صورت غیر عمدى رخ دهد. معمولاً حذف واحدهای آزمایشی، از قبل طراحی شده و عمدى است که به دلایلی همانند صرفه‌جویی در زمان و هزینه توسط آزمونگر صورت می‌گیرد. در این حالت گفته می‌شود که سانسور رخ داده است. یعنی تنها بخشی از داده‌های طول عمر مشاهده می‌شود. در این حالت نمونه مشاهده شده را نمونه سانسور شده می‌نامند. سانسورهای معمولی نوع اول و نوع دوم رایج‌ترین نوع سانسورها هستند. در طرح سانسور شده نوع دوم فقط ۲۷ تای اول مشاهدات مرتب شده از یک نمونه تصادفی قابل مشاهده می‌باشند. این نوع طرح سانسور اغلب در آزمون‌های طول عمر به کار می‌رود. در این حالت تمام n عضو موجود مورد آزمایش

قرار می‌گیرند. اما به جای اینکه آزمایش را تا زمان از کار افتادگی تمام اعضا ادامه نیافرود، تا هنگامی که ۲ عضو از کار بیافتد، ادامه می‌یابد. این کار باعث صرفه‌جویی در زمان و هزینه‌های آزمایش می‌شود.

تحقیقات مختلفی پیرامون پارامتر R تحت طرح سانسورهای مختلف انجام شده است که می‌توان به برخی از آنها مانند اصغرزاده و کاظمی [۱۳]، اصغرزاده و همکاران [۱۴]، ساراچوغلو همکاران [۱۵] و رضایی و همکاران [۱۶] اشاره کرد. در سال‌های اخیر احمدی و غفوری [۱۷] به مطالعه مدل تنش- مقاومت چند مولفه‌ای در توزیع نیمه- نرمال تعمیم یافته تحت سانسور فراینده پرداختند. هم‌چنین ماوریا و تریپاتی [۱۸] و کهن‌سال و رضاخواه [۱۹] مدل تنش- مقاومت چند مولفه‌ای را تحت سانسور فراینده به ترتیب برای توزیع رایلی دوپارامتری و توزیع گومپرتر بررسی کردند. هم‌چنین کهن‌سال [۲۰] پارامتر پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت را در توزیع بور نوع ۷، را تحت سانسور فراینده پیوندی مورد مطالعه قرار داد.

هدف نویسندهای این مقاله از نگارش آن بررسی برآوردهای پارامتر $R = P(Y < X)$ بر اساس طرح سانسور راست نوع دوم در توزیع پواسون- نمایی است و برآوردهای ماسکیم درستنمایی و بیز برای دوتابع زیان مربعات خطأ و خطی نمایی محاسبه شده است. در واقع نویسندهای این مقاله از برآوردهای ماسکیم درستنمایی بهینه با محاسبات و شبیه‌سازی‌های دقیق به بررسی برآوردهای پارامتر $R = P(Y < X)$ پرداخته‌اند که به بهینه‌سازی فرایندها در کاربرد کمک نماید. برآوردهای بیز با برآوردهای ماسکیم درستنمایی مقایسه شده است که سودمندی برآوردهای بیز اطمینان نیز برای برآوردهای بیز بررسی شده است. هم‌چنین در این راستا در شبیه‌سازی از زنجیره مارکف جهت محاسبات استفاده شده است که در مدل‌سازی دنیای واقعی کاربردهای زیادی دارد.

در مطالعه شبیه سازی نیز برآوردهای معرفی شده به صورت کامل با هم مقایسه شده اند. ایده اصلی از مطالعه محمد [۲۱] گرفته شده است. محمد داده‌های کامل را برای بررسی پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت در نظر گرفته‌اند و برآوردهای بیز تنها تحت تابع زیان مربعات مورد بررسی قرار دادند. همچنین ایشان توزیع با تابع چگالی پواسون- نمایی با پارامتر شکل یکسان در نظر گرفتند که در این مطالعه توزیع با پارامتر مقیاس یکسان در نظر گرفته شده است.

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع پواسون- نمایی به ترتیب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f_X(x) = \frac{\theta \lambda e^{-\lambda x - \theta e^{-\lambda x}}}{1 - e^{-\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0, \lambda > 0. \quad (1)$$

$$F_X(x) = 1 - \frac{1 - e^{-\theta e^{-\lambda x}}}{1 - e^{-\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0, \lambda > 0. \quad (2)$$

که λ پارامتر مقیاس و θ پارامتر شکل هستند. در این مقاله توزیع با تابع چگالی احتمال (۱) و تابع توزیع تجمعی (۲) با نماد $PE(\theta, \lambda)$ نشان داده می‌شود. در ادامه به بررسی برآوردهای پارامتر R بر اساس روش‌های برآوردهای اشاره شده پرداخته می‌شود. در ادامه در ابتدا در بخش ۲ به محاسبه برآوردهای ماسکیم

درستنمایی پارامتر R پرداخته می‌شود. در بخش‌های ۳ و ۴ به ترتیب بازه اطمینان نرمال و برآوردگر بیز پارامتر قابلیت اعتماد تنش مقاومت محاسبه می‌شود. در آخرین بخش نیز با استفاده از شبیه سازی و مجموعه داده‌های واقعی به تحلیل روش‌های برآورد پرداخته می‌شود.

۲ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر R

فرض کنید θ_1, θ_2 و λ متغیرهای تصادفی مستقل با پارامترهای شکل ۱ و پارامتر مقیاس یکسان λ باشند. به سادگی مشاهده می‌شود که

$$R = P(Y < X) = \int_0^\infty F_Y(t)f_X(t)dt = 1 - \dots \quad (3)$$

بنابراین $y = (Y_{(1)}, \dots, Y_{(r)})$ و $x = (X_{(1)}, \dots, X_{(r)})$ نشان‌دهنده نمونه‌های مرتب سانسور شده نوع دوم باشند،تابع درستنمایی به صورت

$$L(\theta_1, \theta_2, \lambda | x, y) \propto \prod_{i=1}^{r_1} f_X(x_{(i)}) [1 - F_X(x_{(r)})]^{(n_1 - r_i)} \prod_{j=1}^{r_2} f_Y(y_{(j)}) [1 - F_Y(y_{(r)})]^{(n_2 - r_j)} \quad (4)$$

حاصل می‌شود. با توجه به رابطه (4) لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ln L(\theta_1, \theta_2, \lambda | x, y) &\propto r_1 \ln \theta_1 + r_2 \ln \theta_2 + (r_1 + r_2) \ln \lambda - n_1 \ln(1 - e^{(-\theta_1)}) - n_2 \ln(1 - e^{(-\theta_2)}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r_1} (\lambda x_{(i)} + \theta_1 e^{-\lambda x_{(i)}}) + (n_1 - r_1) \ln(1 - e^{\theta_1 e^{-\lambda x_{(r)}}}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{r_2} (\lambda y_{(j)} + \theta_2 e^{-\lambda y_{(j)}}) + (n_2 - r_2) \ln(1 - e^{\theta_2 e^{-\lambda y_{(r)}}}) \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از تابع لگاریتم درستنمایی نسبت به هر یک از پارامترها نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} &= \frac{r_1}{\theta_1} - \frac{n_1 e^{-\theta_1}}{1 - e^{-\theta_1}} = \sum_{i=1}^{r_1} e^{-\lambda x_{(i)}} + \frac{(n_1 - r_1) e^{-\lambda x_{(r)}} - \theta_1 e^{-\theta_1 \lambda x_{(r)}}}{1 - e^{-\theta_1 \lambda x_{(r)}}}, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} &= \frac{r_2}{\theta_2} - \frac{n_2 e^{-\theta_2}}{1 - e^{-\theta_2}} = \sum_{j=1}^{r_2} e^{-\lambda y_{(j)}} + \frac{(n_2 - r_2) e^{-\lambda y_{(r)}} - \theta_2 e^{-\theta_2 \lambda y_{(r)}}}{1 - e^{-\theta_2 \lambda y_{(r)}}}, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} &= \frac{r_1 + r_2}{\lambda} - \sum_{i=1}^{r_1} x_{(i)} e^{-\lambda x_{(i)}} + (n_1 - r_1) \frac{\theta_1 x_{(r)} e^{-\lambda x_{(r)} - \theta_1 e^{-\lambda x_{(r)}}}}{(1 - e^{-\theta_1 e^{-\lambda x_{(r)}}})} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{r_2} y_{(j)} + \theta_2 \sum_{j=1}^{r_2} y_{(j)} e^{-\lambda y_{(j)}} + (n_2 - r_2) \frac{\theta_2 y_{(r)} e^{-\lambda y_{(r)} - \theta_2 e^{-\lambda y_{(r)}}}}{(1 - e^{-\theta_2 e^{-\lambda y_{(r)}}})} \end{aligned}$$

با استفاده از معادله‌های درستنمایی و با حل آن‌ها می‌توان برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای θ_1 ، θ_2 و λ را محاسبه کرد. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی \hat{R} با جایگذاری θ_1 و θ_2 در معادله‌ی (3)

به دست می‌آید. همانطور که ملاحظه می‌شود نمی‌توان فرم بسته‌ای برای برآوردگرهای θ_1 و θ_2 و پارامتر R یافت که راه حل دستیابی به آن استفاده از روش‌های عددی است. حل چنین دستگاه معادلاتی با استفاده از نرم افزار به سادگی امکان‌پذیر است. در این مطالعه با استفاده از نرم افزار R وتابع nlm برای محاسبه کمک‌گرفته شده است که در بخش مطالعه عددی مرور می‌شود.

۳ بازه اطمینان تقریباً نرمال برای R

بازه اطمینان تقریباً نرمال (AN) با استفاده از معکوس ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده و به کارگیری روش دلتا حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن بردار پارامتری $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \lambda)$ واضح است که ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده به صورت زیر است:

$$I(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^r \log L}{\partial \lambda^r} & \frac{\partial^r \log L}{\partial \lambda \partial \theta_1} & \frac{\partial^r \log L}{\partial \lambda \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^r \log L}{\partial \theta_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^r \log L}{\partial \theta_1^r} & \frac{\partial^r \log L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^r \log L}{\partial \theta_2 \partial \lambda} & \frac{\partial^r \log L}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^r \log L}{\partial \theta_2^r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که $I_{33} = I_{22} = I_{11}$ پس با معکوس کردن ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده، ماتریس کوواریانس تقریبی $a = [A_{ij}]$ به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$A = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} I_{22}I_{33} & -I_{12}I_{33} & -I_{22}I_{13} \\ -I_{12}I_{22} & I_{11}I_{33} - I_{13}I_{21} & I_{12}I_{13} \\ -I_{22}I_{21} & I_{12}I_{21} & I_{11}I_{22} - I_{12}I_{21} \end{pmatrix}$$

که در آن $u = (I_{11}I_{22}I_{33} - I_{12}I_{21}I_{33} - I_{13}I_{21}I_{22})R$ برای یافتن واریانس V از روش دلتا استفاده می‌شود که با توجه به رابطه (۳) می‌توان نوشت:

$$R = g(\theta_1, \theta_2) \quad (5)$$

که $g(\theta_1, \theta_2) = 1 - \frac{1}{(1-e^{-\theta_1})} \left[1 - \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \frac{1-e^{-(\theta_1+\theta_2)}}{1-e^{-\theta_1}} \right]$ با به کارگیری روش دلتا عبارت زیر حاصل می‌شود:

که در آن و با جایگذاری عبارات قبل،

$$V = b'Ab = \frac{1}{u} [c_1^2 I_{22} I_{33} + c_2^2 (I_{11} I_{22} - I_{12}^2) + c_3^2 (I_{11} I_{33} - I_{13}^2) - 2c_1 c_2 I_{12} I_{23} - 2c_1 c_3 I_{13} I_{22} + 2c_2 c_3 I_{11} I_{32}]$$

حاصل می‌شود. اکنون برای برآورد V کافی است که به جای پارامترها، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی آن‌ها قرار داده شود. بنابراین بازه اطمینان تقریب نرمال پارامتر R به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(R - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{V}, R + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{V}), \quad (6)$$

که Z_α نشان‌دهنده چندک مرتبه α توزیع نرمال استاندارد است.

۴ برآوردگر بیز پارامتر R

با استفاده از برآوردگرهای بیز، می‌توان بهبود دقت و قدرت استنتاج در حوزه‌های مختلف داشت. به طور معمول، در فرآیندهای تصمیم‌گیری و تحلیل داده‌ها، داده‌های موجود همواره با عدم قطعیت روبرو هستند. برآوردگر بیز این عدم قطعیت را با ارایه تخمین‌های احتمالی از پارامترها به پژوهشگر ما کمک می‌کند که در مسائل استنتاجی و تصمیم‌گیری به صورت دقیق‌تری تصمیم‌گیری نماید. با داشتن توزیع احتمالی پارامترها، می‌توان بیشترین اطمینان را در مورد تخمین‌ها محاسبه کرد و در تصمیم‌گیری‌های حساس و پیچیده، با رعایت عدم قطعیت، تصمیمات بهتری گرفته شود. بهبود استنتاج در برآوردگرهای بیزی به معنای به دست آوردن تخمین‌های دقیق‌تر و قابل اعتماد است. این به ما این امکان را می‌دهد که در تحلیل داده‌ها و ارایه پیش‌بینی‌ها، نتایجی کیفیت بالا و قابل اطمینان داشته باشیم. به طور خلاصه، برآوردگر بیزی به عنوان یک برآوردگر بهینه، با استفاده از مدیریت عدم قطعیت و ارایه تخمین‌های احتمالی، می‌تواند به دقت و قدرت استنتاج بیشتری دست یابد. این ابزار قادرمند در تحلیل داده‌ها، پیش‌بینی‌ها و تصمیم‌گیری‌های مبنی بر اطلاعات موجود، به ما این امکان را می‌دهد که بهترین تصمیمات

$$b = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

را در مواجهه با عدم قطعیت داشته باشیم.

تفاوت برآوردگرهای بیزی با برآوردگرهای کلاسیک که تمایز اساسی ایجاد می‌کند؛ در واقع فرض متغیر تصادفی پارامتر توزیع در برآورد بیزی است. در بسیاری از شرایط رهیافت بیزی بهتر از روش کلاسیک برای نمونه با حجم کوچک است، مشروط بر اینکه اطلاعات اضافی در مورد پارامتر در دسترس باشد. برآوردگرهای بیز بیشتر بر اساس تابع زیان مربع خطأ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. قابل ذکر است که تابع زیان مربع خطأ جریمه یکسانی را برای کم برآورده و بیش برآورده برآوردگرهای در نظر می‌گیرد که در برخی کاربردهای عملی

نامناسب است. به عنوان مثال در محاسبه مشخصه‌های قابلیت اعتماد، مسئله بیش برآورده بسیار خطرناکتر از کم برآورده است. یکی از مهم‌ترین توابع زیانی که این محدودیت را اصلاح می‌کند، تابع زیان خطی نمایی^۱ است که به صورت

$$L(g(\theta), \hat{g}(\theta)) = \exp\{v(\hat{g}(\theta) - g(\theta))\} - v(\hat{g}(\theta) - g(\theta)) - 1, \quad v \neq 0. \quad (8)$$

تعريف می‌شود که علامت و بزرگی پارامتر شکل v جهت و میزان تقارن تابع زیان خطی را نشان می‌دهد. برآورده‌گر بیز $g(\theta)$ تحت این تابع زیان برابر می‌شود با در ادامه این بخش، با استفاده از توابع زیان مربع خطأ و تابع زیان خطی نمایی برآورده‌گرهای بیز پارامتر R محاسبه می‌شوند. ابتدا فرض می‌شود که متغیرهای تصادفی θ_1 ، θ_2 و λ مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع پیشین گاما به صورت زیر هستند:

$$\theta_1 \sim \Gamma(a_1, b_1), \quad \theta_2 \sim \Gamma(a_2, b_2), \quad \lambda \sim \Gamma(a_\lambda, b_\lambda)$$

$$G(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp[-bx] \quad x > 0.$$

بنابراین اکنون می‌توان تابع چگالی پسین توأم θ_1 ، θ_2 و λ را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1, \theta_2, \lambda | x, y) &= G_{\theta_1|\lambda}(a_1 + r_1, b_1 + \sum_{i=1}^{r_1} e^{-\lambda x_{(i)}}) G_{\theta_2|\lambda}(a_2 + r_2, b_2 + \sum_{j=1}^{r_2} e^{-\lambda y_{(j)}}) \\ &\times G_\lambda(a_\lambda + r_\lambda, b_\lambda + \sum_{i=1}^{r_\lambda} x_{(i)} + \sum_{j=1}^{r_\lambda} y_{(j)}) H(\theta_1, \theta_2, \lambda) \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن

$$H(\theta_1, \theta_2, \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{r_1} \left(\frac{1 - e^{-\theta_1 e^{-\lambda x_{(i)}}}}{1 - e^{-\theta_1}} \right)^{r_1} \prod_{j=1}^{r_2} \left(\frac{1 - e^{-\theta_2 e^{-\lambda y_{(j)}}}}{1 - e^{-\theta_2}} \right)^{r_2}}{(1 - e^{-\theta_1})^{r_1} (1 - e^{-\theta_2})^{r_2}}.$$

و تابع G نشان‌دهنده توزیع گاما است. در ادامه جهت محاسبه تقریبی از برآورده‌گرهای بیز و ساختن ناحیه‌های اعتبار مرفوع ترین چگالی پسین (HPD) از روش نمونه‌گیری زنجیر مارکوف مونت کارلو استفاده می‌شود. همانطور که می‌دانیم ناحیه اعتبار مرفوع ترین چگالی پسین (HPD) $(1-\alpha)\% \times 100$ برای هر متغیر θ زیرمجموعه C از فضای پارامتری Θ به فرم

$$\hat{g}_{LL}(\theta) = -\frac{1}{v} \log(E_\theta[e^{-vg(\theta)} | data]) \quad (10)$$

$$C = \{\theta \in \Theta | \pi(\theta | x) > k(\alpha)\}$$

¹ Linex Loss Function

است که در آن α مقداری است که $P(C | x) = 1 - \alpha$ باشد. در ادامه ما با استفاده از زنجیر مارکوف مونت کارلو چگالی‌های پسین شرطی تولید کردہ‌ایم.

زنجیره مارکف که به افتخار آندری مارکوف ریاضی‌دان اهل روسیه این گونه نام‌گذاری شده یک سیستم ریاضی است که در آن انتقال از یک حالت به حالت دیگر صورت می‌گیرد که البته تعداد این حالات قابل شمارش است. زنجیره مارکف یک فرایند تصادفی بدون حافظه است بدین معنی که توزیع احتمال شرطی حالت بعد تنها به حالت فعلی بستگی دارد و به وقایع قبل از آن وابسته نیست. این نوع بدون حافظه بودن خاصیت مارکف نام دارد. زنجیره مارکف در مدل سازی دنیای واقعی کاربردهای زیادی دارد. روش‌های زنجیره مارکف مونت کارلو (که شامل روش‌های قدم زدن تصادفی مونت کارلو می‌باشد) دسته‌ای از الگوریتم‌های است برای نمونه‌برداری از توزیع‌های احتمال که مبنای آن ساختن یک زنجیره مارکف با ویژگی‌های مطلوب است. سپس حالت زنجیره پس از تعداد بسیار زیادی مرحله به عنوان نمونه‌ای از توزیع مطلوب استفاده می‌شود. کیفیت این نمونه متناسب با افزایش تعداد مراحل افزایش می‌یابد. معمولاً ساختن یک زنجیره مارکف با ویژگی‌های مطلوب کار ساده‌ای است. مشکل اصلی تعداد مراحل مورد نیاز است برای اینکه حالت زنجیره با خطای قابل قبولی به یک توزیع ثابت همگرا شود. زنجیر خوب زنجیره‌ای است که در آن با شروع از یک موقعیت دلخواه خیلی سریع به توزیع ثابت همگرا شود. به طور معمول زنجیر مارکف مونت کارلو برای نمونه‌برداری توزیع مورد نظر ما را فقط تخمین می‌زند. به دلیل اینکه این توزیع همواره تحت تاثیر نقطه شروع است. ولی الگوریتم‌های پیچیده‌ای وجود دارند که اساس آن‌ها زنجیره‌های مارکف مونت کارلو است و با محاسبات اضافی تاثیر نقطه شروع را از بین برده و توزیع موردنظر ما را به طور دقیق مشخص می‌کنند.

در ادامه جهت برآورد پارامترها بر اساس تکنیک‌های زنجیر مارکف مونت کارلو ابتدا با استفاده از نمونه‌گیری گیز از طریق الگوریتم متروپولیس-هستینگس تولید نمونه از توزیع پسین تولید می‌شود و سپس برآورد گرها محاسبه می‌گردد. همان‌گونه که اشاره شد، با استفاده از زنجیر مارکوف مونت با توجه به رابطه (۱۰) چگالی‌های سین شرطی تولید می‌شود که مراحل تولید چگالی‌های پسین شرطی با استفاده از زنجیر مارکوف مونت کارلو برای θ_1 ، θ_2 و λ و نمونه‌های تصادفی x و y به اندازه m_1 و m_2 به صورت زیر هستند:

$$\text{مرحله اول: تولید } \lambda^{(k)} \text{ از } \text{Gamma}(a_r + m_1 + m_2, b_r + \sum_{j=1}^{m_1} x_j + \sum_{j=1}^{m_2} y_j)$$

$$\text{مرحله دوم: تولید } \theta_1^{(k)} \text{ از } \text{Gamma}(a_1 + m_1, b_1 + \sum_{j=1}^{m_1} e^{-\lambda x_j})$$

$$\text{مرحله سوم: تولید } \theta_2^{(k)} \text{ از } \text{Gamma}(a_r + m_r, b_r + \sum_{j=1}^{m_r} e^{-\lambda y_j})$$

$$\text{مرحله چهارم: } R^{(k)} \text{ را با جایگذاری } \theta_1^{(k)} \text{ و } \theta_2^{(k)} \text{ در رابطه (۳) محاسبه می‌شود.}$$

مرحله پنجم: مراحل ۴-۱ M-بار تکرار می‌شود.

برآورد گرها بیز پارامتر R تحت توابع زیان مربع خط و خطی نمایی به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$R_S = \frac{\sum_{k=1}^M R^{(k)} H(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\sum_{k=1}^M H(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \lambda^{(k)})}, \quad R_{LL} = -\frac{1}{v} \ln \left[\frac{\sum_{k=1}^M e^{-vR^{(k)}} H(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\sum_{k=1}^M H(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \lambda^{(k)})} \right]$$

بازه‌های اطمینان HPD

بازه‌های اطمینان HPD در سطح $(1-\alpha)$ که احتمال برای هر نقطه درون بازه، باید بیشتر از هر نقطه خارج از بازه باشد، در نظر گرفته می‌شود. بازه اطمینان HPD کوتاه‌ترین بازه اطمینان در میان تمامی بازه‌های اطمینان ممکن با احتمال یکسان $(1-\alpha)$ است. در این بخش با کمک ایده مطرح شده توسط چن و شائو [۲۲] الگوریتم زیر را برای محاسبه بازه اطمینان HPD در سطح $(1-\alpha) \cdot 100\%$ پارامتر R ارایه می‌شود.

Chen-Shao الگوریتم

۱. محاسبه نمونه $(R_j, j = 1, 2, \dots, M)$ با استفاده از نمونه‌گیری MCMC از رابطه (۳).
 ۲. مقادیر نمونه‌های $(R_{(j)}, R_{(2)}, \dots, R_{(M)})$ به صورت $R_j, j = 1, 2, \dots, M$ مرتب می‌شوند.
 ۳. بازه اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100\%$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:
- $$(R_{(j)}, R_{(j+[M(1-\alpha)])}), \quad j = 1, 2, \dots, M - [(1-\alpha)M],$$
- که در آن $[M]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا برابر با $[M]$ است.
۴. بازه اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100\%$ HPD حاصل در گام (۳) را به طور مشابه می‌توان برای پارامترهای θ و λ بدست آورد که از تکرار مجدد ارایه روند خودداری شده است.

۵ تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی و مجموعه داده‌های واقعی به تحلیل روش‌های برآورد پرداخته می‌شود. در زیربخش شبیه‌سازی عملکرد برآوردگرها و فاصله اطمینان پیشنهادی بررسی می‌شود. سپس با استفاده از داده واقعی نتایج تئوری در عمل بررسی می‌شوند.

۱-۵ شبیه‌سازی

در بخش‌های قبل با استفاده از دیدگاه‌های کلاسیک و بیز، برآوردگرها مختلفی را برای پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت R محاسبه شده است. در این بخش، مطالعه شبیه‌سازی با فرض دو حالت برای بررسی رفتار این برآوردگرها انجام می‌شود. در حالت اول فرض می‌شود که جامعه اول (X) دارای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1, \lambda) = (1, 2)$ و جامعه دوم (Y) دارای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1, \lambda) = (3, 2)$ است. در حالت دوم نیز جامعه اول (X) دارای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1, \lambda) = (3, 2)$ و جامعه دوم (Y) دارای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1, \lambda) = (4, 2)$ فرض می‌شود.

برای ارزیابی عملکرد برآوردگرهای ماکسیمم درستنما می کافی است تا تحت نمونه‌های سانسور شده نوع دوم تعدادی R شبیه‌سازی شود. بدین منظور ۱۰۰۰ بار نمونه‌هایی به اندازه n_1 از توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1, \lambda) = (1, 2)$ و نمونه‌هایی به اندازه n_2 از توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1, \lambda) = (3, 2)$ تولید می‌شوند. نمونه توزیع پواسون-نمایی تحت نمونه‌های سانسور نوع دوم با توجه به رابطه (۴) برای مقادیر مختلف (r_1, r_2) تولید شده است. با توجه به الگوی سانسور نوع دوم که مقادیر (r_1, r_2) ثابت در نظر گرفته می‌شود، با فرض مقادیر مختلف برآوردگرهای مقایسه شده‌اند. سپس با حل معادله‌های درستنما می‌باشد. رابطه (۳) برآوردگر R در هر تکرار محاسبه می‌شود. عملکرد برآوردگرهای بیزی تحت نمونه‌های سانسور شده نوع دوم با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار می‌گیرد. جهت تولید نمونه با توجه به رابطه (۱۰) برای مقادیر مختلف (r_1, r_2) با استفاده از الگوریتم متربولیس-هستینگس توزیع‌های پسین برآوردگرهای M تولید می‌شود و سپس برآوردگرهای تحت تابع زیان‌های معرفی شده محاسبه می‌شوند. باید توجه کرد که در الگوریتم MCMC تعداد تکرارها $M = 2000$ است. علاوه بر آن، استنباط بیزی با استفاده از توزیع پیشین به صورت $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0/000$ در نظر گرفته شده است.

فرض کنید R_i برآورد پارامتر R در تکرار i ام به ازای $i = 1, 2, \dots, 1000$ باشد. در این صورت برآورد حداقل مربعات خطأ (MSE) به صورت $\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (R_i - R)^2$ خواهد بود. مقادیر برآوردگر حداقل مربعات خطأ برای مقادیر مختلف طرح‌های سانسور و پارامترها در جدول ۱ گزارش شده است. همچنین بازه‌های اطمینان AN و HPD در سطح ۹۵٪ محاسبه شده‌اند که نتایج حاصل نیز در جدول ۱ قابل مشاهده است.

جدول ۱. برآورد و حداقل مربعات خطای پارامتر R

n_1	n_2	R	(r_1, r_2)	MLE	Bayes	
					SEL	LINEX
۴۰	۵۰	۰/۲۰	(۱۰, ۱۰)	۰/۲۷۳۴(۰/۰۰۴۹)	۰/۲۷۱۳(۰/۰۰۴۶)	۰/۲۷۰۳(۰/۰۰۲۴)
			(۲۰, ۲۰)	۰/۱۵۴۸(۰/۰۰۲۳)	۰/۲۷۱۷(۰/۰۰۴۷)	۰/۲۷۱۶(۰/۰۰۲۲)
			(۲۰, ۳۰)	۰/۳۴۰۲(۰/۰۱۸۸)	۰/۲۶۲۱(۰/۰۰۳۴)	۰/۲۶۲۱(۰/۰۰۰۱)
			(۳۰, ۴۰)	۰/۳۱۸۸(۰/۰۱۳۳)	۰/۲۰۱۲(۰/۰۰۰۳)	۰/۱۵۸۶(۰/۰۰۰۴)
			(۴۰, ۵۰)	۰/۲۹۶۷(۰/۰۰۸۷)	۰/۲۱۳۶(۰/۰۰۰۵)	۰/۱۹۱۱(۰/۰۰۰۳)
	۴۲	۰/۴۲	(۱۰, ۱۰)	۰/۴۱۷۴(۰/۰۰۰۵)	۰/۴۰۵۷(۰/۰۹۵۹)	۰/۴۰۵۵(۰/۰۰۲۹)
			(۲۰, ۲۰)	۰/۵۰۴۲(۰/۰۰۷۵)	۰/۴۲۵۰(۰/۰۰۵۷)	۰/۴۲۴۹(۰/۰۰۰۴)
			(۲۰, ۳۰)	۰/۵۲۹۵(۰/۰۱۲۵)	۰/۴۳۷۹(۰/۰۰۰۴)	۰/۴۳۶۰(۰/۰۰۰۵)
			(۳۰, ۴۰)	۰/۵۲۹۵(۰/۰۱۱۵)	۰/۴۳۶۴(۰/۰۰۰۳)	۰/۴۳۶۴(۰/۰۰۰۴)
			(۴۰, ۵۰)	۰/۴۷۸۵(۰/۰۰۳۷)	۰/۴۵۱۱(۰/۰۰۰۳)	۰/۴۵۰۸(۰/۰۰۰۴)

از جدول ۱ ملاحظه می‌شود که برآوردهای بیزی عملکرد بهتری نسبت به برآوردهای ماکسیمم درستنمایی (MLE) دارند. هم‌چنین در بین برآوردهای بیزی بر اساس معیار MSE برآوردهای بیز با تابع زیان لاینکس، در مقایسه با برآوردهای کلاسیک دارای بهترین عملکرد هستند.

۵-۲ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش جهت بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی داده‌های ارایه شده در [۲۳] در نظر گرفته می‌شود. این داده‌ها طرح پنجره هوایپما تمام شیشه‌ای را توصیف می‌کنند که استحکام پنجره جلا داده شده را اندازه‌گیری می‌کند. مجموعه داده‌ها به شرح زیر هستند.

نتایج بازه‌های اطمینان در جدول شماره ۲ آورده شده است. این دو مجموعه داده که در جدول شماره ۳ گزارش شده‌اند برای بررسی مدل پواسون-نمایی در نظر گرفته می‌شوند. جهت برآوردهای پارامترهای این مدل، از روش ماکسیمم درستنمایی و بیز استفاده شده است. برای آزمون نیکویی برازش مدل منفی لگاریتم درستنمایی، معیار اطلاع آکائیک (AIC) و آماره آزمون کولموگروف-اسمیرنوف ($K-S$) در نظر گرفته شده است. همان‌طور که از جدول ۴ مشاهده می‌شود توزیع EP برازش مناسبی برای داده‌های هر دو گروه فوق است. به علاوه برابری پارامتر مشترک λ برای هر دو مجموعه داده با استفاده از آزمون فرض $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$ در مقابل $H_1: \lambda_1 \neq \lambda_2$ بررسی شده است.

برای این منظور p مقدار متناظر برابر ۰/۴۷۰۶ بوده است. بنابراین با توجه به نتایج حاصل فرض برابری λ برای دو مجموعه داده رد نمی‌شود.

با به کارگیری داده‌های جدول ۳ برآوردهای پارامتر R و بازه اطمینان HPD به روش MCMC تحت توزیع پیشین ناگاهنده، یعنی $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ محاسبه و نتایج در جدول ۵ گزارش شده است.

جدول ۲. بازه اطمینان ۹۵٪، AN و HPD پارامتر R

R	n_1	n_2	(r_1, r_2)	AN	HPD
۰/۲	۴۰	۵۰	(۱۰, ۱۰)	(۰/۲۰ ۱۲,۰ / ۴۴۳۷)	(۰/۱۳۵۲,۰ / ۴۴۶۷)
			(۲۰, ۲۰)	(۰/۱۵۱۳,۰ / ۲۳۵۴)	(۰/۲۴۳۱,۰ / ۲۹۷۴)
			(۲۰, ۳۰)	(۰/۳۳۰۶,۰ / ۳۸۵۲)	(۰/۲۴۹۶,۰ / ۲۹۷۶)
			(۳۰, ۴۰)	(۰/۲۱۲۸,۰ / ۳۹۶۶)	(۰/۲۵۷۱,۰ / ۲۹۴۲)
			(۴۰, ۵۰)	(۰/۲۱۹۸,۰ / ۳۹۰۴)	(۰/۲۷۲۳,۰ / ۳۳۹۴)
۰/۴۲			(۱۰, ۱۰)	(۰/۳۴۲۱,۰ / ۵۳۰۵)	(۰/۳۴۴۴,۰ / ۵۵۹۱)
			(۲۰, ۲۰)	(۰/۴۰۳۱,۰ / ۵۷۵۴)	(۰/۴۵۰۷,۰ / ۵۴۲۱)
			(۲۰, ۳۰)	(۰/۳۹۶۳,۰ / ۵۵۳۲)	(۰/۴۱۱۷,۰ / ۴۸۹۸)
			(۳۰, ۴۰)	(۰/۴۰۰۶,۰ / ۵۷۱۷)	(۰/۴۱۴۰,۰ / ۵۰۰۰)

(۴۰,۵۰)	(۰/۴۳۲۸,۰/۵۱۱۵)	(۰/۴۵۱۳,۰/۵۲۱۱)
---------	-----------------	-----------------

جدول ۳. مجموعه داده‌های اول و دوم

X	۳۵/۹۱۰ ۳۹/۵۸۰ ۳۳/۷۳۰ ۳۳/۷۶۰ ۲۶/۷۷۰ ۴۵/۳۸۱ ۴۴/۰۴۵ ۲۷/۶۷۰ ۲۷/۰۵۰ ۲۵/۸۰۰
Y	۳۵/۷۵۰ ۳۳/۸۹۰ ۲۷/۶۷۰ ۳۹/۵۸۰ ۴۵/۲۹۰ ۳۱/۱۱۰ ۳۷/۰۹۰ ۳۷/۰۸۰ ۳۳/۲۰۰ ۴۴/۰۴۵
	۲۶/۷۷۰ ۳۶/۹۸۰

جدول ۴. آزمون نیکویی برآذش مدل

مجموعه داده‌ها	-log L	AIC	K-S	p-value
اول	۳۳/۰۴۳	۷۰/۰۸۶	۰/۱۰۲۱	۰/۵۸۳۳
دوم	۳۷/۸۱۶۵	۷۹/۶۳۳۱	۰/۹۶۸۷	۰/۶۲۱۷

جدول ۵. برآورده بینه پارامتر R مجموعه داده‌های واقعی

		Bayes		
(r_1, r_2)	MLE	SEL	LINEX	
(۵,۶)	۰/۲۰۳۰	۰/۳۴۶۸ (۰/۳۰۹۸, ۰/۶۵۷۸)	۰/۳۴۳۵	
(۷,۹)	۰/۴۹۶۵	۰/۴۱۶۹ (۰/۳۸۶۹, ۰/۶۱۸۱)	۰/۶۱۸۱	

جدول ۶. فاصله اطمینان پارامتر R مجموعه داده‌های واقعی

	MLE	Bayes
(r_1, r_2)		
(۵,۶)	(۰/۱۸۷۷, ۰/۶۷۷۸)	(۰/۳۰۹۸, ۰/۶۵۷۸)
(۷,۹)	(۰/۴۵۳۱, ۰/۶۹۸۱)	(۰/۳۸۶۹, ۰/۶۱۸۱)

همان‌طور که در جدول ۵ و ۶ مشاهده می‌شود مقادیر برآوردگرهای بیز وتابع لینکس برای (r_1, r_2) مختلف، نزدیکی بهم دارند، اما برآوردگر ماکسیمم درستنما می‌اختلاف دارد. هم‌چنین طول فواصل اطمینان HPD برای (r_1, r_2) مختلف دارای کمترین طول است. با توجه به عملکرد خوب برآوردگر بیز و فواصل اطمینان حاصل از آن، در عمل می‌توان با توجه به شرایط مساله از روش استفاده کرد.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش‌های بینه‌ای برای پارامتر قابلیت اعتماد تنش- مقاومت تحت نمونه‌های سانسور شده نوع دوم در توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای شکل یکسان مورد مطالعه قرار گرفته است. در این راستا برآوردگرهای

ماکسیمم درستنمایی و نیز بازه اطمینان تقریبی نرمال پارامتر R محاسبه شد. همچنین جهت دستیابی به برآوردگرهای بیز از روش تقریب زنجیر مارکوف مونت کارلو استفاده و نتایج گزارش شد. نتایج شبیه‌سازی، یانگر عملکرد بهتر برآوردگرهای بیز نسبت به برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی هستند. همچنین در بین برآوردگرهای بیز، بهترین عملکرد به تابع زیان خطی نمایی متعلق است. نتایج شبیه‌سازی یانگر آن است که با کاهش تعداد نمونه‌های سانسور شده نوع دوم، مقادیر MSE و طول بازه‌های اطمینان کلاسیک و بیزی کاهش می‌یابند. همچنین با به کار گیری داده‌های واقعی نیز عملکرد خوب برآوردگر بیز مشاهده گردید. برآورد بهینه پارامتر تنش- مقاومت، پتانسیل بالایی برای توسعه و بهبود روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها در تحقیقات آینده دارد.

منابع

- [1] Birnbaum, Z.W. (1956). On a use of the Mann-Whitney statistic. In: Proceedings of Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 13–17, University of California Press, Berkeley, CA.
- [2] Birnbaum, Z. W., and Mc Carty, R. C. (1958). A Distribution-Free Upper Confidence Bound for $P(Y < X)$, Based on Independent Samples of X and Y . The Annals of Mathematical Statistics, 29, 558–562.
- [3] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), The Stress-Strength Model and its Generalization, Theory and Application, New York: World scientific.
- [4] Mahmoud, M. A. W., El-Sagheer, R. M., Soliman, A. A. and Abd Ellah, A. H. (2016), Bayesian Estimation of $P[Y < X]$ Based on Record Values From the Lomax Distribution and MCMC Technique, Journal of Modern Applied Statistical Methods, 15, 488-510.
- [5] Nadeb, H., and Torabi, H. (2019). Goodness-of-fit test for the family of location-scale distributions under type II progressive censoring. *Statistical Thought Journal*, 13, 197-221.
- [6] Kohansal, A., Al-Mohammad, N. and Azizzadeh, F., (2020). Bayesian estimation of the stress-strength parameter under hybrid progressive censoring in the Lomax distribution. *Statistical Thought Journal*, 16, 505-534.
- [7] Balakrishnan, N., Ng, H. K. T. and Kannan, N. (2002). A Test of Exponentiality Based on Spacings for Progressively Type-II Censored Data, in Huber-Carol, C., Balakrishnan, N., Nikulin, M. S. and Mesbah, M. (eds), Goodness-of-Fit Tests and Model Validity, Birkhäuser, Boston.
- [8] Balakrishnan, N., Ng, H. K. T. and Kannan, N. (2004). Goodness-of-Fit Tests Based on Spacings for Progressively Type-II Censored Data from a General Location-Scale Distribution, IEEE Transaction on Reliability, 53, 349-356.
- [9] Pakyari, R. and Balakrishnan, N. (2012). A General Purpose Approximate Goodness of-Fit for Progressively Type-II Censored Data, IEEE Transactions on Reliability, 61, 238-244.
- [10] Pakyari, R. and Balakrishnan, N. (2013), Goodness-of-Fit Tests for Progressively Type-II Censored Data from Location-Scale Distributions, Journal of Statistical Computation and Simulation, 83, 167-178.
- [11] Wang, B. (2008). Goodness-of-Fit Test for the Exponential Distribution Based on Progressively Type-II Censored Sample, Journal of Statistical Computation and Simulation, 78, 125–132
- [12] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications, Birkhäuser, Boston.
- [13] Asgharzadeh, A. and Kazemi, M., (2014). Stress-Strength reliability of exponential distribution based on hybrid censored samples. Proceeding of 12th the Iranian Statistical Conference, 25-27 August, Razi University, Iran.
- [14] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z., (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, SORT, 35, 103-124.
- [15] Saraoğlu, B., Kinaci, I. and Kundu, D. (2012). On estimation of $R = P(Y < X)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring. Journal of Statistical Computation and Simulation, 85, 729–744.

- [16] Rezaei, S., Alizadeh Noughabi, R. and Nadarajah, S., (2015). Estimation of stress strength reliability for the generalized Pareto distribution based on progressively censored samples. Journal of Annals Data Sciences, DOI: 10.1007/s40745-015-0033-0.
- [17] Ahmadi, K. and Ghafouri, S., (2019). Reliability Estimation in a Multicomponent Stress-Strength Model under Generalized Half-Normal Distribution Based on Progressive type-II Censoring, Journal of Statistical Computation and Simulation, 89, 2505- 2548.
- [18] Maurya, R. K. and Tripathi, Y. M., (2019) Reliability Estimation in a Multicomponent Stress-Strength Model for Burr XII Distribution under Progressive Censoring, Brazilian Journal of Probability and Statistics , Accepted.
- [19] Kohansal, A. and Rezakhah, S. (2019). Inference of $R = P(Y < X)$ For Two Parameter Rayleigh Distribution Based on Progressively Censored Samples, Statistics, 53, 81-100.
- [20] Kohansal, A., (2020). Bayesian and Classical Estimation of $R = P(Y < X)$ Based on Burr Type XII Distribution under Hybrid Progressive Censored Samples, Communications in Statistics- Theory and Methods, 49, 1043-1081.
- [21] Mohamed, M. O., (2015). Reliability with stress-strength for poisson-exponential distribution. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience 12.11: 4915-4919.
- [22] Chen, M.H., and Shao, Q.M., (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. Journal of Computational and Graphical Statistics, 8(1), 69–92.
- [23] Pepi, J. W. (1994). Failsafe design of an all BK-7 glass aircraft window. SPIE Proc, 2286, 431–443.