مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال نوزدهم، شماره سوم (پیاپی ۷۴)، پاییز ۰۱، ص ص ۴۴-۲۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای مساله حمل و نقل با قیود فازی انعطاف‌پذیر

گوهر شکوری[1*]، سید هادی ناصری[2]، محمد مهدی پایدار[3]
[1] دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، مازندران، بابلسر، ایران.
[2]دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، مازندران، بابلسر، ایران.
[3]دانشیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، مازندران، ایران

رسید مقاله: ۳ مرداد ۱۴۰۰
پذیرش مقاله: ۲۶ دی ۱۴۰۰

چکیده
هزینه‌های حمل و نقل امروزه به عنوان یکی از مهم‌ترین هزینه‌های موثر در قیمت تمام‌شده کالا و قیمت نهایی مصرف برای مشتری به ویژه در مدیریت زنجیره‌تامین محسوب می‌گردد. از این رو تمرکز بر هزینه‌های حمل و نقل به سبب کاهش قیمت تمام‌شده، و به تبع آن بالا بردن رضایت مشتری و افزایش جایگاه صنعت مورد نظر در میان رقبا امری ضروری است. با توجه به این‌که منابع در دسترس (ظرفیت مراکز عرضه) عموماً به شکل حداقل ظرفیت موجود در مدل درنظر گرفته می‌شود، برای حل چنین مدل‌هایی، ابتدا محدودیت عرضه فازی را به صورت قطعی تبدیل کرده و سپس با به‌کارگیری روش‌های حل موجود، مساله قطعی حل می‌شود که متاسفانه سازگاری مناسبی با ماهیت عدم قطعیت در تصمیم‌گیری ندارد. بنابراین در این مقاله جهت سازگاری با شرایط واقعی، محدودیت عرضه در مدل حمل و نقل به صورت فازی انعطاف‌پذیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، یک رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای مساله حمل و نقل با قیود فازی انعطاف‌پذیر ارایه می‌شود تا جواب با بیشترین رضایت‌مندی را به‌دست آورد. در نهایت، یک مثال عددی برای مدل پیشنهادی و روش حل ارایه‌شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر، برنامه‌ریزی خطی فازی، تابع عضویت، مدل حمل و نقل فازی.

۱ مقدمه
حمل و نقل یکی از بخش‌های زیربنایی اقتصاد هر کشور است که نقش بسیار مهمی در خدمات لجستیکی خرد و کلان اقتصاد ملی کشورها دارد و به طور کلی شامل انتقال یک یا چند کالا از چندین مبدا یا تولیدکننده به چندین مقصد یا مصرف‌کننده می‌باشد. به دلیل تمایل به جهانی‌سازی کسب و کار و مدیریت بهینه و یکپارچه، کلیه عملیات به ویژه دربستر مجازی، توجه و اهمیت آن ملموس‌تر است. در این امر، کسب سهم بیشتر بازار و در

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: gshakouri2@gmail.com

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

نهایت ایجاد پویایی در زنجیره‌تامین در جهت غلبه بر سایر رقبا، بسیار مهم می‌باشد و نیز در تلاش است که سطح رضایت‌مندی مشتریان و سود را افزایش داده و کل هزینه جابجایی را کاهش دهد که با حل کارای مساله حمل و نقل در شبکه توزیع می‌توان این اهداف را به دست آورد. از سوی دیگر دنیای تجارت امروزه دنیای عدم قطعیت است، عدم قطعیت در سیستم‌های حمل و نقل یکی از مهم‌ترین مسایل کاربردی در تحقیق در عملیات می‌باشد. عدم قطعیت در متغیرهای مربوط به تقاضا، عرضه، هزینه‌ها و سایر متغیرها وجود دارد که بررسی این مسایل در شرایط غیرقطعی و فازی از اهمیت بالایی برای محققین برخوردار است. در دهه‌های نخستین معرفی فازی، رابطه‌ی بین برنامه‌ریزی پارامتری و برنامه‌ریزی خطی فازی به وسیله توابع عضویت خطی مورد استفاده گسترده قرار گرفته و تحقیقات زیادی در مساله حمل و نقل کلاسیک با محیط فازی انجام شده است. یک روش دو مرحله‌ای برای مساله حمل و نقل با اعداد فازی ذوزنقه‌ای توسط گانی و رازاک معرفی شد. در مرحله اول مقداری محصول برای برآورده‌شدن حداقل شرایط مقصد فرستاده می‌شود و مقادیر مازاد منابع در صورت وجود، با توجه به هزینه حمل و نقل، ارسال می‌شود که هدف به حداقل رساندن مجموع هزینه های حمل و نقل می‌باشد[۱]. الگوریتم روش نقطه صفر فازی برای مساله حمل و نقل با ضرایب هدف و عرضه و تقاضای فازی مثلثی بازه‌ای را پندیان و همکاران ارایه دادند[۲]. کاور و کومار الگوریتمی براساس روش رتبه‌بندی برای مدل حمل و نقل با اعداد ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته معرفی کردند [۳]. دهباری و همکاران مساله مسیریابی وسایل نقلیه را درنظر گرفته و مدل ریاضی چندهدفه آن را ارایه دادند. سپس از الگوریتم فراابتکاری حمل و نقل چندهدفه استفاده نموده و جواب پارتو را محاسبه نمودند [۴]. گابرل و همکاران در [۵]، از بهینه‌سازی استوار دومرحله‌ای برای مدل حمل و نقل استفاده نمودند که نسبت به رویکرد تک مرحله‌ای، انعطاف‌پذیری بیشتری به تصمیم‌گیرنده می‌دهد. گایو و همکاران [۶]، مساله حمل ونقل با منابع تصادفی و تقاضا و هزینه نامشخص را در نظر گرفت. مدل را با در نظر گرفتن مقدار مورد انتظار برای تابع هدف و سطوح اطمینان در توابع محدودیت، به یک مدل ریاضی دقیق تبدیل نموده و جواب را با استفاده از نظریه عدم قطعیت و نظریه احتمال به دست آورد. آکیل‌باشا و همکاران در[۷] ، از روش mid-width برای مساله حمل و نقل بازه‌ای، دانتزیگ [۸]، الگوریتم سیمپلکس برای بررسی مساله حمل و نقل فازی استفاده نمودند. ناصری و خبیری [۹] مساله حمل و نقل را با ضرایب تابع هدف خاکستری و مقادیر حمل و نقل فازی درنظر گرفته و مدل را با سفیدسازی اعداد خاکستری و غیرفازی‌سازی اعداد فازی به صورت قطعی نوشته و جواب بهینه را یافتند. خلیفه و همکاران[۱۰]، مساله حمل و نقل کلاسیک را با هزینه و عرضه و تقاضا با اعداد فازی شش ضلعی را پیشنهاد داده‌اند. ابتدا با استفاده از رویکرد رتبه‌بندی، عرضه و تقاضا را به صورت اعداد دقیق نوشته و سپس با استفاده از آلفا برش، مساله را به صورت مساله خطی بازه‌ای تبدیل نموده و به طریق مساله چند هدفه به حل آن پرداختند. پورتقی و همکاران مساله حمل و نقل را با اعداد خاکستری ارایه داده و سپس بدون نیاز به سفیدسازی پارامترهای خاکستری و با استفاده از روش مقایسه جواب مساله را به صورت اعداد خاکستری تعیین نمودند [۱۱]. در این مقاله یک مدل حمل و نقل با قیود انعطاف‌پذیر مطالعه می‌شود. برای یافتن جواب بهینه ایده‌آل از رویکرد پارامتری پیشنهادی توسط عطاری و ناصری[۱۲] استفاده می‌شود. اخیراً نیز چند مدل برنامه ریزی خطی با رویکرد انعطاف‌پذیر توسط ناصری و

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

همکاران بر پایه رویکردهای وردگای و همکاران[۱۹،۱۳،۱۴،۱۵،۱۶،۱۷،۱۸] ارایه شد. به ویژه، رویکرد پیشنهادی در برخی مدل‌های کاربردی همچون جیره‌بندی غذایی، زنجیره‌تامین[۲۰] ... به کار گرفته شده است. اما متأسفانه علی‌رغم کاربردی بودن مدل‌های حمل و نقل کار خاصی در این زمینه ملاحظه نشد. از این‌رو برای پر کردن خلأ مطالعاتی رویکرد انعطاف‌پذیر در حوزه یاد شده، در حقیقت، از یک رویکرد چندپارامتری با توجه به تابع عضویت تعریف‌شده برای حل مدل حمل و نقل با محدودیت عرضه انعطاف‌پذیر استفاده می‌شود. برای راه حل پیشنهادشده نیز یک الگوریتم ارایه می‌شود که با توجه به ماهیت انعطاف‌پذیر بودن روابط فازی قیود از رویکرد پارامتری برای محاسبه جواب های شدنی مساله استفاده نموده و در هدف بعدی بیشینه کردن سطوح رضایت‌مندی جواب‌های شدنی مد نظر قرار می‌گیرد. این مقاله در پنج بخش تهیه شده است. در بخش۲، مدل پیشنهادی و ابزارهای تبدیل مدل ارایه‌شده به شکل پارامتری می‌پردازیم. در بخش ۳، مراحل حل مدل و الگوریتم آن را پیشنهاد می‌کنیم. برای توصیف فرآیند حل، در بخش ۴ یک مثال عددی ارایه می‌شود و در نهایت بخش ۵ به نتیجه‌گیری از مطالعه انجام شده اختصاص دارد.

۲ مساله حمل و نقل با شرایط انعطاف‌پذیر

یکی از انواع مدل‌های حمل و نقل، مساله حمل و نقل با قیود فازی است که با شرایط واقعی مطابقت بیشتری دارد، و هدف آن، حداقل نمودن هزینه حمل و نقل در شرایط عدم قطعیت است. اساساً در مدل حمل و نقل کلاسیک، کالای مورد نظر از m تامین‌کننده $i=۱,۲,...,m$ که دارای میزان عرضه حداکثر به مقدار s_i به n مشتری $j=۱,۲,...,n$ که مشتریان دارای تقاضا حداقل به مقدار d_j می باشند، انتقال داده می‌شود. درحالی که c_{ij} هزینه ارسال هر واحد کالا ارسالی از تأمین‌کننده i به مشتری j است و x_{ij} متغیر تصمیم می‌باشد. مدل ریاضی مرتبط با مساله یادشده به صورت زیر است[۲۱،۲۲]:

مساله (۱):

$$Min \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{۱}$$

$s.t.$

$$\sum_{j=۱}^{n} x_{ij} \le s_i, \quad i=۱,۲,...,m, \tag{۲}$$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} \ge d_j, \quad j=۱,۲,...,n, \tag{۳}$$

$$x_{ij} \ge ۰, \quad i=۱,۲,...,m, \quad j=۱,۲,...,n. \tag{۴}$$

که در آن

i: شاخص تولیدکننده؛

j: شاخص مشتری؛

m: تعداد تولیدکننده؛

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

n: تعداد مشتری؛

s_i: میزان عرضه تولیدکننده i؛

d_j: میزان تقاضای مشتری j؛

c_{ij}: هزینه انتقال هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j؛

x_{ij}: میزان واحد کالای ارسالی از مبدأ i به مقصد j می‌باشد.

محدودیت‌های نوع اول داده شده در(۲) نشان‌دهنده آن است که مجموع کالای ارسالی از مبدأ i بایستی کوچک‌تر یا مساوی با ظرفیت آن باشد.

محدودیت‌های نوع دوم داده شده در(۳) نشان‌دهنده آن است که مجموع کالاهای دریافتی هر مشتری نباید کمتر از میزان تقاضایش باشد.

در دنیای واقعی، به دلایل زیادی، با اطلاعات مبهم و نا دقیق سروکار داریم که برای توصیف چنین شرایطی می‌توانیم از پارامترهای فازی استفاده کنیم.

۲-۱ مدل ریاضی مساله

این بخش به معرفی مدل ریاضی مساله حمل و نقل با قیود انعطاف‌پذیر اختصاص دارد.

برای شرایطی که با توجه به قیمت بازار و افزایش نیروی کار بتوان عرضه را افزایش داد، می‌توان مدل ریاضی مناسبی که بیانگر شرایط واقعی مساله باشد طراحی کرد. یکی از مدل‌های ریاضی که امکان مدل‌سازی ریاضی مساله با رویکرد یادشده را در شرایط نادقیق فراهم می‌آورد مدل حمل و نقل با قیود انعطاف‌پذیر است. در این مدل، قیود مربوط به عرضه به صورت فازی انعطاف‌پذیر مدل‌سازی شده است. نماد $\lesssim$ به معنی "تقریبا کوچکتر از یا مساوی با" است که برای داده‌های نادقیق از جنس قیود عرضه در مدل حمل و نقل به کار می‌رود.

مساله (۲):

$$Min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (5)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lesssim s_i , \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j , \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8)$$

که در آن قید فازی $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lesssim s_i$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود [۱۵،۱۷]:

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

$$\mu_i(x)=\begin{cases} ۱, & x-s_i\le ۰\\ ۱-\dfrac{x-s_i}{p_i}, & ۰\le x-s_i\le p_i\\ ۰, & x-s_i\ge p_i\end{cases} \qquad (۹)$$

نظر به این‌که قیود (۶) خوش‌تعریف نیست (فضای جواب مشخص برای این دسته از قیود ایجاد نمی‌شود)، برای حل این مدل از رویکرد پارامتری، بر پایه مطالعات[۱۵] استفاده می‌شود.

لم۲-۱-۱: قید انعطاف‌پذیر $\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}\lesssim s_i$ با قید پارامتری $\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}\le s_i+\theta p_i$ که درآن $\theta\in[۰,۱]$ معادل است.

اثبات: هر جواب x که در قید انعطاف‌پذیر $\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}\lesssim s_i$ صدق می‌کند عملاً یک مجموعه فازی با تابع عضویت به صورت زیر است:

$$\mu_i(x)=\begin{cases} ۱, & x-s_i\le ۰\\ ۱-\dfrac{x-s_i}{p_i}, & ۰\le x-s_i\le p_i\\ ۰, & x-s_i\ge p_i\end{cases}$$

براین اساس سه حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

- اگر $\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}-s_i\le ۰$، یعنی iامین قید برقرارباشد، آنگاه مقدارتابع عضویت آن یک است و میزان رضایت‌مندی بیشترین مقدار ممکن است.
- اگر $۰\le\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}-s_i\le p_i$، آنگاه تابع عضویت به صورت یکنوا غیرنزولی بوده که به علت کمبود امکانات، خدمات‌رسانی را دچار مشکل کرده است و میزان رضایت‌مندی مشتری کاهش می‌یابد.
- اگر $\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}-s_i\ge p_i$، یعنی تلورانس بیش از حد مجازی است که تصمیم‌گیرنده مشخص کرده است.

پس قید i به طورکامل نقض شده است و تابع عضویت آن صفر است. یعنی شرایط و نوع خدمات‌رسانی مورد پذیرش مشتریان قرار نگرفته است.

از این‌رو، با توجه به پیوسته بودن تابع عضویت یادشده، مقادیر سمت راست قیود انعطاف‌پذیر از مقدار s_i تا s_i+p_i براساس مقادیر پیوسته θ به ترتیب از $\theta=۰$ تا $\theta=۱$ ایجاد می‌شود. درنتیجه می‌توان رابطه فازی انعطاف‌پذیر را به صورت پارامتری معادل $s_i(\theta)=s_i+\theta p_i$ که درآن $\theta\in[۰,۱]$ نمایش داد.■

در مدل اخیر، فرض می‌شود برای قید انعطاف‌پذیر عرضه مقدار تولرانس از پیش‌تعیین‌شده داده شده است. تولرانس قید iام عرضه، مقدار p_i (یک عدد حقیقی نامنفی) است. اکنون با توجه انعطاف‌پذیر بودن قیود عرضه، قید iام، یعنی $\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}\lesssim s_i\ ,\quad i=۱,۲,\dots,m$ با قید پارامتری زیر معادل خواهد بود.

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i + \theta p_i \tag{10}$$

که در آن $\theta \in [0,1]$ است.

لم زیر بیانگر معادل بودن دو قید (۶) و (۱۰)می‌باشد.

لم ۲-۱-۲: مساله (۲) با مساله زیر معادل است:

مساله (۳):

$$Min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{11}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i + \theta p_i\,, \quad i=1,2,\dots,m\,, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j\,, \quad j=1,2,\dots,n, \tag{13}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n. \tag{14}$$

اثبات: براساس لم ۲-۱-۱ واضح است.

نتیجه ۲-۱-۱: با توجه به لم ۲-۱-۱، خوش تعریفی مساله (۳) نتیجه می‌شود.

لم ۲-۱-۳: با توجه به تعریف تابع عضویت (۹) که توابع پیوسته و یکنوا هستند، آنگاه مسایلی با قیدهایی به صورت $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lesssim s_i$ و $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le \tilde{s}_i$، مسایل معادلی خواهند بود. بنابراین مساله اصلی با مساله زیر معادل خواهد بود:

مساله (۴):

$$Min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{15}$$

$$s.t.$$

$$X \in X_\alpha \tag{16}$$

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m),\alpha_i \in [0,1], \quad i=1,2,\dots,m. \tag{17}$$

که در آن X_α فضای جواب‌های شدنی مساله اصلی است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف۲-۱ -۱: فرض کنید $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in[0,1]^m$ و

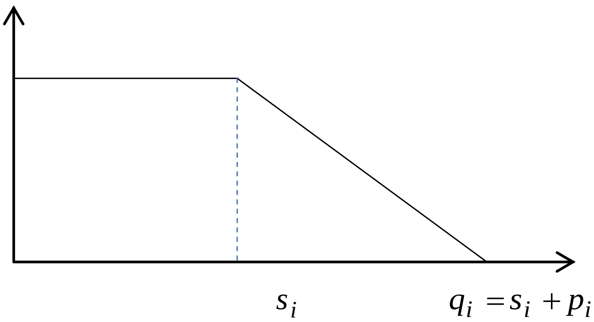
$$X_\alpha=\left\{ x_{ij}\in\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i+(1-\alpha_i)p_i, \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\ge d_j, \\ x_{ij}\ge 0, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n. \end{array} \right\} \tag{18}$$

به طوری که برای $X=(x_{ij})\in X_\alpha, x_{ij}\in\mathbb{R}$ یک جواب $\alpha-$شدنی مساله (۴) را تعریف می کند[۱۷،۱۵].

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

۲-۲ مدل پارامتری مساله

در این بخش، مدل حمل و نقل پیشنهادی را با استفاده از تابع عضویت تعریف‌شده در(۹) از حالت فازی انعطاف‌پذیر به حالت پارامتری دقیق تبدیل می‌کنیم تا بتوانیم فرایند حل را به دست آوریم. از آنجاکه درعمل داده‌ها در سایه‌ای از ابهام و عدم دقت ارایه می‌شوند، اطلاعات را فازی انعطاف‌پذیر با پارامترهایی در بازه $[s_i, s_i + p_i]$ تفسیر می‌کنیم. چون حل مساله به صورت فازی غیرممکن است، با استفاده از تابع عضویت تعریف‌شده (۹) شکل پارامتری دقیق آن را می‌سازیم. نمایش بازه فازی انعطاف‌پذیر در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱. عدد فازی انعطاف‌پذیر

با توجه به تعریف بالا داریم:

$$p_i = q_i - s_i = (s_i + p_i) - s_i$$

به طوری که $p_i \geq ۰$.

با توجه به تابع عضویت (۹) و رفع خوش تعریف‌نبودن قیود انعطاف‌پذیر، می‌توان مدل را به صورت زیر تعریف کرد.

مساله (۵):

$$Min \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (۱۹)$$

$s.t.$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} \geq d_j, \quad j = ۱,۲,\ldots,n, \qquad (۲۰)$$

$$\sum_{j=۱}^{n} x_{ij} \leq s_i + (۱-\alpha_i) p_i, \quad i = ۱,۲,\ldots,m, \qquad (۲۱)$$

$$x_{ij} \geq ۰, \quad i = ۱,۲,\ldots,m, \quad j = ۱,۲,\ldots,n. \qquad (۲۲)$$

$$۰ \leq \alpha_i \leq ۱ \qquad (۲۳)$$

که در آن p_i براساس تابع عضویت داده شده در (۹) تعریف شده‌اند. توجه داریم که مطالب یاد شده بالا با دیدگاه رفع مشکل ناخوش تعریفی قیود انعطاف‌پذیر طرح شده‌اند.

بنابراین مساله حمل و نقل فازی داده شده به شکل مساله(۲)، با جایگذاری توابع عضویت (۹) با مساله پارامتری قطعی بالا معادل باشد.(در اینجا α_i توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود.)

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

در بخش بعدی با استفاده از تعاریف بیان‌شده و تبدیلات معادل مساله به فرایند حل و ارایه الگوریتم آن می‌پردازیم.

۳ پیشنهاد فرایند حل مدل

در بخش‌های قبل تاکید شد که به دلیل خوش تعریف‌نبودن مدل وقتی که فرض انعطاف‌پذیری قیود در آن وجود دارد فضای جواب شدنی مساله به طور مشخص قابل تعریف نیست و حل مساله با شکل اولیه خود ماهیت واقعی سیستم تصمیم‌گیری را انعکاس نمی‌دهد. از این‌رو، برای حل، ابتدا مساله را از حالت فازی انعطاف‌پذیر به حالت پارامتری تبدیل و سپس برای به دست آوردن جواب بهینه از بیشینه کردن سطوح رضایت‌مندی استفاده می‌کنیم.
در این راستا برخی تعاریف و مفاهیم اساسی مورد نیاز است که در زیر آورده می‌شود.

تعریف ۳-۱: فرض کنید رابطه $\lesssim$ یک نمایش فازی از رابطه نابرابری $\leq$ در مساله (۲) باشد. بردار $x \in \mathbb{R}$ یک جواب $\alpha-$ کارا با تابع هدف کمینه‌سازی است، اگر هیچ $x' \in X_{\alpha}$ نباشد که $z(x) > z'(x)$.
همچنین هر جواب $\alpha-$ کارا برای مساله (۵) یک جواب $\alpha-$ شدنی برای آن نیز است[۱۷].

گزاره ۳-۱: فرض کنید $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_m)$ و $\alpha'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, ..., \alpha''_m)$ که در آن $\alpha'_i \leq \alpha''_i$ برای همه iها باشد. آن گاه هر جواب α'' شدنی، یک جواب α' شدنی می‌باشد.

قضیه۳-۱: فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in [0,1]^m$ و $x^* \in X_{\alpha}$ و $x^*_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,n$ یک جواب $\alpha-$شدنی مساله(۵) باشد. آنگاه بردار $x^* \in \mathbb{R}^{mn}$ یک جواب $\alpha-$کارای مساله (۵) با تابع هدف کمینه‌سازی می‌باشد اگر و تنها اگر x^* یک جواب بهینه مساله(۵) باشد.

اثبات: فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in [0,1]^m$ و $x^*_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,n$ یک جواب $\alpha-$ کارا مساله (۵) با تابع هدف کمینه‌سازی باشد. با توجه به مساله(۲) و تابع عضویت تعریف‌شده برای $i = 1,2,...,m$ داریم: $\mu_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lesssim s_i \right\} \geq \alpha_i$ یا $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i + (1-\alpha_i) p_i$. بنابراین x^* یک جواب شدنی برای مساله (۵) است. همچنین با توجه به تعریف ۳-۱ هیچ $x' \in X_{\alpha}$ وجود ندارد که $z(x^*) > z'(x)$. این بدین معناست که x^* یک جواب بهینه مساله (۵) است. از سوی دیگر، اگر x^* جواب بهینه مساله (۵) باشد به وضوح x^*یک جواب $\alpha-$شدنی مساله(۵) است و بنابراین با توجه به تعریف بهینگی x^*، بر $\alpha-$کارا بودن x^* اشاره دارد.

اکنون با حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی مساله (۴) و با تعیین α_iتوسط تصمیم‌گیرنده و جایگزین کردن آن در محدودیت متناظرش در مساله (۵) و سپس با حل مساله به‌دست آمده از این جایگزینی، جواب $\alpha-$ کارا مساله (۴) محاسبه می‌شود.

جواب $\alpha-$ کارا مساله (۵) دو ویژگی اساسی دارد:

الف) جواب دارای درجه رضایت‌مندی متناسب با هر محدودیت است.

ب) جواب به‌دست آمده بهینه است.

این جواب تصمیم‌گیرنده را قادر می‌سازد تا با تعیین اولویت مطلوب و با توجه به شرایط محیطی یک جواب با درجه شدنی وکارایی مطلوب‌تر به دست آورد.

بدین منظور ابتدا مساله (۵) را حل می‌کنیم. فرض کنید (x^*,α^*) جواب بهینه و z^* مقدار بهینه تابع هدف مرحله اول با درجه کارایی α^* باشد. سپس یک جریمه $p_{\circ}$ را برای هزینه حمل و نقل پرداخت می‌کنیم و تابع هدف مساله مرحله اول را به صورت قید با جریمه $p_{\circ}$ در مرحله دوم می‌نویسیم. در ادامه با انتخاب جواب بهینه مطلوب توسط تصمیم‌گیرنده، برای یافتن جواب بهتر که دارای رضایت‌مندی بیشتر می‌باشد، مساله (۶) را حل می‌کنیم.

مساله (۶):

$$Max \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \qquad (۲۴)$$

$s.t.$

$$z \le z_1^* + (1-\alpha_{\circ}) p_{\circ} \qquad (۲۵)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j , \quad j = 1,2,\dots,n, \qquad (۲۶)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i + (1-\alpha_i) p_i , \quad i = 1,2,\dots,m, \qquad (۲۷)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n, \qquad (۲۸)$$

$$0 \le \alpha_i \le 1, \quad \alpha_i^* \le \alpha_i \le 1 \qquad (۲۹)$$

بدیهی است این مدل یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندپارامتری است و با حل آن می‌توان جواب بهینه (x_R^{**},α_R^{**}) و مقدار بهینه تابع هدف z_R^{**} با درجه رضایت‌مندی α_R^{**} را به دست آورد.

با توجه به این‌که با کوچک شدن ناحیه جواب، جواب بهینه بهتر نخواهد شد، تصمیم‌گیرنده می‌خواهد مقدار بهینه تابع هدف را فقط حداکثر به اندازه $(1-\alpha_{\circ})P_{\circ}$ با رعایت حداقل رضایت‌مندی مورد پذیرش قیود، در جواب بهینه افزایش دهد. به وضوح مدل بالا، یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد که با حل آن، دستیابی به یک جواب بهینه با رضایت‌مندی بیشتر حاصل شده و با این شرایط از حل مساله (۵) جواب بهینه مساله اصلی به دست می آید. قضیه زیر برای پوشش نظری بحث در این خصوص آورده شده است.

قضیه ۳-۲ :جواب بهینه x^{**} مساله(۵) یک جواب $\alpha-$کارای مساله (۲) است.

اثبات: با رویکرد فرض خلف قصد داریم اثبات را ارایه کنیم. از این‌رو، فرض کنیم x^{**} جواب بهینه کارا مساله (۲) نباشد، آنگاه $\bar{x}$ وجود دارد به طوری که $\mu_i(x^{**}) \le \mu_i(\bar{x}), \forall i = 1,2,\dots,m$ و برای بعضی از k ها $\mu_k(x^{**}) \le \mu_k(\bar{x})$. حال از آنجا که (x^{**},α^{**}) جواب بهینه است و ضرایب در تابع هدف مرحله دوم مثبت هستند، داریم:

$$\mu_i(x^{**}) = \alpha_i^{**}, i = 1,2,\dots,m$$

حال با انتخاب $\mu_i(\bar{x}) = \bar{\alpha}_i \,, i = ۱,۲,...,m$، جواب $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ برای مساله مرحله دوم شدنی است. از این رو

$$\sum_{i=۱}^{m} \alpha_i^{**} = \sum_{i=۱}^{m} \mu_i(x^{**}) < \sum_{i=۱}^{m} \mu_i(\bar{x}) = \sum_{i=۱}^{m} \mu_i(x) + \alpha_k$$

بنابراین نتیجه می‌شود (x^{**}, α^{**}) یک جواب بهینه مرحله دوم نیست که به وضوح یک تناقض است.

لم ۳-۱: مساله (۶) همواره شدنی است. زیرا، برای $\alpha_i = ۰$ یک جواب بهینه (z^*, x^*) وجود دارد.

اثبات: به وضوح مساله (۶) برای $\alpha_i = ۰$ یک جواب بهینه (z^*, x^*) وجود دارد.

لم ۳-۲: مساله (۶) هیچ‌گاه بی‌کران نیست.

اثبات: از آنجاکه حداکثر مقدار هر α_i، یک می‌باشد و درنتیجه حداکثر مقدار مجموع α_iها برابر m است.

قضیه ۳-۳: جواب به‌دست آمده از مساله (۶) بهتر از جواب معادله (۵) نخواهد بود.

اثبات: فرض کنید x^* جواب بهینه مساله (۵) با سطح رضایت‌مندی α باشد. در مساله (۶) با افزایش سطح α ناحیه شدنی را کوچک‌تر کرده و واضح است که با کوچک شدن ناحیه شدنی جواب به دست آمده از حل مساله(۶) (با توجه به مساله مینیمم سازی) بهتر نمی‌شود.(یعنی یا برابر مساله (۵) بوده یا بدتر از آن می‌باشد).

بعد از معرفی مدل ارایه‌شده و مراحل حل آن و بیان قضایای لازم، حال یک الگوریتم حل برای مدل ارایه می‌دهیم.

الگوریتم حل

یک مساله حمل و نقل را با قید فازی انعطاف‌پذیر بازه‌ای در نظر بگیرید که شامل s_i, d_j, p_i باشد. الگوریتم حل را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

گام اول: مساله (۲) را در بازه $[s_i, s_i + p_i]$ در نظر بگیرید.

گام دوم: با توجه به تابع عضویت تعریف شده (۹)، مساله (۵) را بسازید.

گام سوم: مساله (۵) را براساس α_i های مختلف حل کنید تا جواب بهینه (x^*, α^*) با مقدار بهینه تابع هدف z^* برای مساله به دست آید.

گام چهارم: مساله (۵) را با تغییر تابع هدف در قالب مساله (۶) برای α_i^* های انتخاب‌شده (توسط تصمیم گیرنده/ کارشناس خبره) از مرحله اول، برحسب حداقل سطح رضایت‌مندی‌شان حل کنید تا جواب بهینه (x^{**}, α^{**}) با مقدار بهینه تابع هدف z^{**} را به دست آورید.

در بخش بعدی یک مثال کاربردی ارایه شده است که در آن فرایند حل به صورت کامل بیان‌شده و از برنامه لینگو برای یافتن جواب مساله استفاده کرده‌ایم.

٤ مثال عددی

برای‌تولید فولاد، سنگ‌آهن باید از دو معدن استخراج‌شده و به سه کارخانه ذوب آهن حمل شود که با توجه به فاصله مکانی بین معادن و کارخانه‌ها می‌خواهیم هزینه نهایی مربوط به حمل و نقل کالاها را کمینه کنیم، با توجه

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

به این‌که هزینه حمل هر واحد کالا به ازای هر کیلومتر ۱۰۰ تومان است. در جدول زیر میزان موجودی انبارها و تقاضای فروشگاه‌ها نیز ثبت شده است. و درضمن تصمیم‌گیرنده حداکثر خطای تقاضا برای قید اول را ۵ و برای قید دوم ۱۲ و برای قید سوم ۹ درنظر گرفته است.

جدول ۱. مقادیر عرضه و تقاضا و هزینه حمل و نقل

	کارخانه ۱	کارخانه ۲	کارخانه ۳	ظرفیت عرضه
معدن۱	۹	۱۶	۲۸	۱۰۳
معدن۲	۱۴	۲۹	۱۹	۱۹۷
تقاضا	۷۱	۱۳۳	۹۶	

با توجه به مجموع عرضه و تقاضا ملاحظه می‌کنیم که جدول حمل و نقل متوازن است و مساله را به صورت زیر فرموله می‌کنیم.

هدف کمینه کردن کل هزینه حمل و نقل برای برآورده کردن تقاضای فروشگاه‌ها با توجه به موجودی انبارها می‌باشد.

- معادن: $i=۱,۲$
- کارخانه ها: $j=۱,۲,۳$
- متغیرهای تصمیم: x_{ij} تعداد واحد کالایی که باید از معادن i به کارخانجات j ارسال شود.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ ۹x_{۱۱}+۱۶x_{۱۲}+۲۸x_{۱۳}+۱۴x_{۲۱}+۲۹x_{۲۲}+۱۹x_{۲۳}\\
&s.t.\\
&x_{۱۱}+x_{۱۲}+x_{۱۳}\lesssim ۱۰۳\\
&x_{۲۱}+x_{۲۲}+x_{۲۳}\lesssim ۱۹۷\\
&x_{۱۱}+x_{۲۱}+x_{۳۱}\geq ۷۱\\
&x_{۱۲}+x_{۲۲}+x_{۳۲}\geq ۱۳۳\\
&x_{۱۳}+x_{۲۳}+x_{۳۳}\geq ۹۶\\
&x_{ij}\geq ۰,\quad i=۱,۲,\quad j=۱,۲,۳.
\end{aligned}
$$

معادله را به صورت زیر به حالت پارامتری دقیق می‌نویسیم.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ ۹x_{۱۱}+۱۶x_{۱۲}+۲۸x_{۱۳}+۱۴x_{۲۱}+۲۹x_{۲۲}+۱۹x_{۲۳}\\
&s.t.\\
&x_{۱۱}+x_{۱۲}+x_{۱۳}\leq ۱۱۳-۱۰\alpha_{۱}\\
&x_{۲۱}+x_{۲۲}+x_{۲۳}\leq ۲۱۷-۲۰\alpha_{۲}\\
&x_{۱۱}+x_{۲۱}\geq ۷۱\\
&x_{۱۲}+x_{۲۲}\geq ۱۳۳\\
&x_{۱۳}+x_{۲۳}\geq ۹۶\\
&x_{ij}\geq ۰,\quad ۰<\alpha_i\leq ۱,\quad i=۱,۲,\quad j=۱,۲,۳.
\end{aligned}
$$

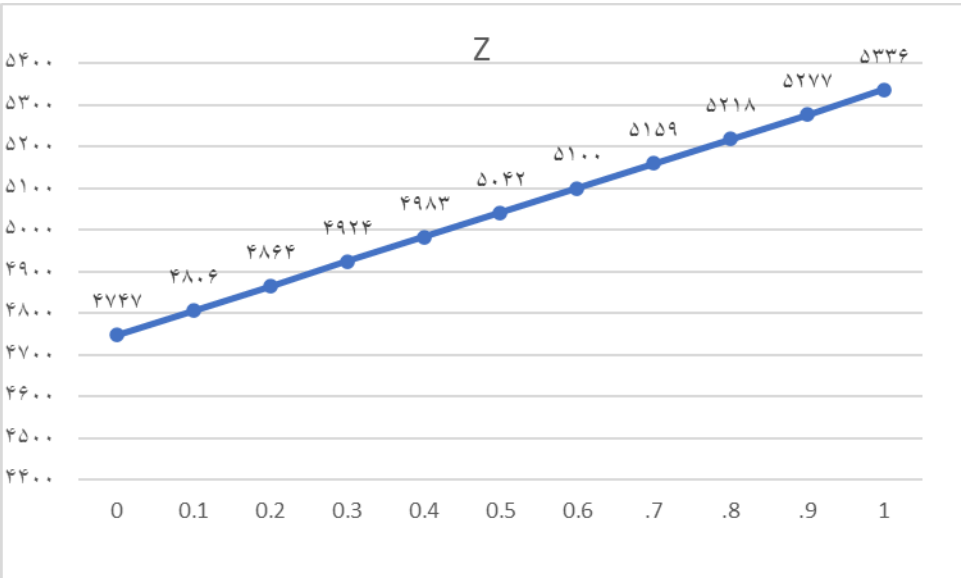
[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

حال مدل بالا را به ازای α_iهای مختلف با استفاده از لینگو به دست می‌آوریم که مقادیر آن در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۲. مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف α_i

α_i	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/٤	۰/۵	۰/٦	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
Z	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
x_{11}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{12}	۱۱۳	۱۱۲	۱۱۱	۱۱۰	۱۰۹	۱۰۸	۱۰۷	۱۰۶	۱۰۵	۱۰۴	۱۰۳
x_{13}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{21}	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱
x_{22}	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
x_{23}	۴۶	۴۶	۴۶	۴۶	۴۶	۴۶	۴۶	۴۶	۴۶	۴۶	۴۶

نمودار پایین نشان‌دهنده این است که با افزایش سطح رضایت‌مندی مشتری، مقادیر تابع هدف افزایش می‌یابد. شایان ذکر است در اینجا روند تحلیل همانند بررسی تغییرات مقادیر تابع هدف یک مساله دوهدفه است که هدف غالب سطح رضایت‌مندی (درجه صدق‌پذیری) است. از این‌رو، دو تابع هدف در جهت متفاوت تغییر می‌کنند و به همین دلیل برخلاف تصور تابع هدف با افزایش سطح رضایت‌مندی کاهش نخواهد یافت.



شکل ۲. مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف α_i

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

در حالتی که $\alpha^* = (۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)$ است، جواب $z^* = ۵۲۷۱$ می‌باشد که برای یافتن جواب کارا معادله زیر را حل می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
& Max\ \alpha_۰ + \alpha_۱ + \alpha_۲ \\
& s.t. ۹x_{۱۱} + ۱۶x_{۱۲} + ۲۸x_{۱۳} + ۱۴x_{۲۱} + ۲۹x_{۲۲} + ۱۹x_{۲۳} \le z^* + (۱-\alpha_۰)۵۰۰ \\
& x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} \le ۱۰۳ + (۱-\alpha_۱)۱۰ \\
& x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} \le ۱۹۷ + (۱-\alpha_۲)۲۰ \\
& x_{۱۱} + x_{۲۱} \ge ۷۱ \\
& x_{۱۲} + x_{۲۲} \ge ۱۳۳ \\
& x_{۱۳} + x_{۲۳} \ge ۹۶ \\
& x_{ij} \ge ۰, \quad ۰ < \alpha_i \le ۱, \quad i = ۱,۲, \quad j = ۱,۲,۳.
\end{aligned}
$$

با توجه به روش پیشنهادی جواب بهینه تابع هدف معادله بالا $\alpha^{**} = (۰/۸۷, ۱, ۱), z^{**} = ۵۳۳۶$ و جواب بهینه به صورت $x^{**} = (۰, ۱۰۳, ۰, ۷۱, ۳۰, ۹۶)$ می‌باشد.

که جواب بهینه با انتخاب تصمیم‌گیرنده و با رضایت‌مندی بیشتر مشتری به دست آورده‌ایم.

با توجه به مقادیر مختلفی که برای α_i در نظر می‌گیریم می‌توانیم تحلیل حساسیت داشته باشیم. با تغییرات α_i در قید اول و دوم مقادیر تابع هدف را بررسی می‌کنیم.

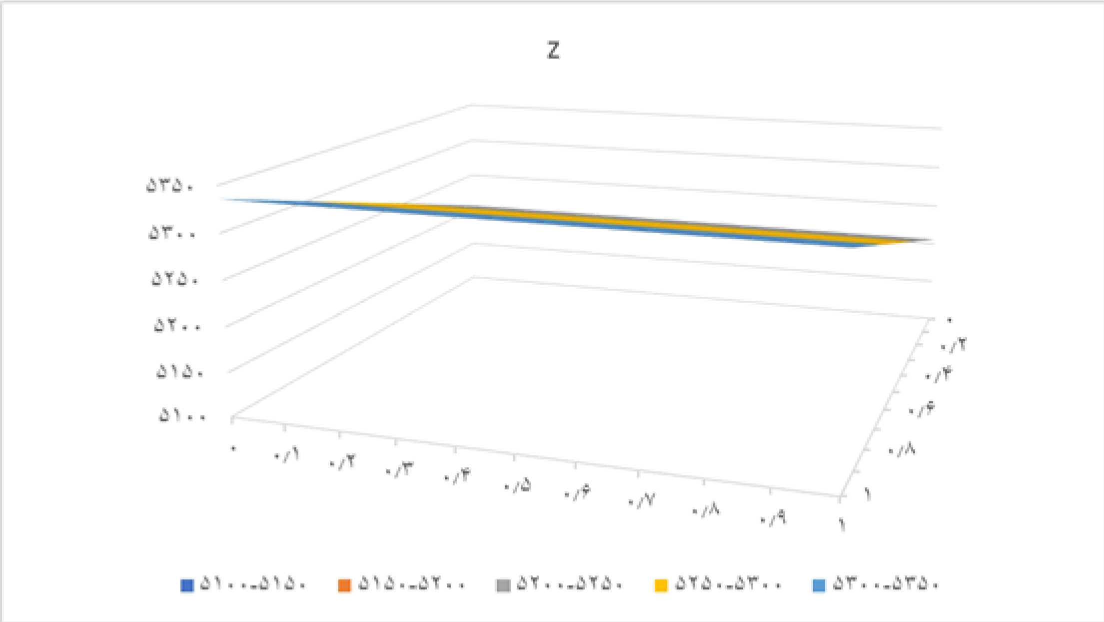
جدول ۳. مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف α_i

$\alpha_۲ \backslash \alpha_۱$	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/٤	۰/۵	۰/٦	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
۰	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۰/۱	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۰/۲	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۰/۳	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۰/٤	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۰/۵	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۰/٦	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۰/۷	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

۵۳۳۶	۵۳۲۳	۵۳۱۰	۵۲۹۷	۵۲۸۴	۵۲۷۱	۵۲۵۸	۵۲۴۵	۵۲۳۲	۵۲۱۹	۵۲۰۶	۰/۸
۵۳۳۶	۵۳۲۳	۵۳۱۰	۵۲۹۷	۵۲۸۴	۵۲۷۱	۵۲۵۸	۵۲۴۵	۵۲۳۲	۵۲۱۹	۵۲۰۶	۰/۹
۵۳۳۶	۵۳۲۳	۵۳۱۰	۵۲۹۷	۵۲۸۴	۵۲۷۱	۵۲۵۸	۵۲۴۵	۵۲۳۲	۵۲۱۹	۵۲۰۶	۱

نمودار بعدی بیانگر این است که با افزایش سطح رضایت‌مندی مشتری، مقادیر تابع هدف افزایش می‌یابد.



شکل۳. مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف α_i

با توجه به تحلیل حساسیت، تصمیم‌گیرنده قادر می‌باشد که بهترین انتخاب را برای α_i داشته باشد که مزیت روش پیشنهادی می‌باشد.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل حمل و نقل با قیود عرضه نادقیق با شرایط انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده است. امکان پارامترهای غیرقطعی برای تصمیم‌گیرنده داده شده است که ابتدا مساله غیرقطعی را به فرم قطعی پارامتری تبدیل کرده و سپس با رویکرد برنامه‌ریزی دومرحله‌ای و حدود انتظار برای هرعرضه و با نظر تصمیم‌گیرنده به جواب $\alpha-$کارا رسیده‌ایم. یکی از نتایج مثبت کاهش هزینه‌های حمل و نقل، افزایش رضایت‌مندی مشتریان و در نتیجه سود بیشتر برای شرکت‌ها می‌باشد. نتیجه دیگر نیز تحلیل حساسیت آن بوده که حق انتخاب بیشتری به تصمیم‌گیرنده داده است. در پژوهش‌های آتی می‌توان همزمان از تقاضای فازی انعطاف‌پذیر استفاده نمود.

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

سپاسگزاری

نویسندگان از داوران محترم که با ارسال نقطه نظرات خود در بهبود نسخه‌های اصلاحی مقاله همکاری نموده‌اند، کمال تشکر و قدردانی دارند.

منابع

[1] Gani, A. N., Razak, K. A., (2006). Two stage fuzzy transportation problem .Journal of Physical Sciences, 10, 63–69.
[2] Pandian, P., Natarajan, G., (2010). A new method for finding an optimal solution for transportation problems. International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications, 4(2), 59–65.
[3] Kaur, A., Kumar, A., (2012). A new approach for solving fuzzy transportation problems using generalized trapezoidal fuzzy numbers .Appl. Soft Comput, 12(3), 1201-1213.
[4] Dehbari, S., Pourrosta, A., Naderi Bani, M., Ghobadian, E., Tavakkoli-Moghaddam, R., (2013). Routing of multi-purpose vehicles with possible service time and fuzzy demand under time window constraints. Journal of Operations Research and its Applications, 9(4), 85-106.
[5] Gabrel, V., Lacroix, M., Murat, C., Remli, N., (2014). Robust location transportation problems under uncertain demands. Discrete Applied Mathematics, 164, 100-111.
[6] Guo, H., Wang, X., Zhou, S., (2015). A transportation problem with uncertain costs and random supplies. International Journal of e-Navigation and Maritime Economy, 2, 1–11.
[7] Akilbasha, A., Pandian, P., Natarajan, G., (2018). An innovative exact method for fully interval integer transportation problems. Information in Medicine Unlocked, 11, 95-99.
[8] Dantzig, G. B., (2018). Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, Activity Analysis of Production and Allocation. In: Koopmans, T. C., Ed., John Wiley& Sons, New York, 359-373.
[9] Nasseri, S. H., Khabiri, B., (2019). A Gray Transportation Problem in Fuzzy Environment. Journal of Operations Research and its Applications, 16(3), 111-122.
[10] Khalifa, A. E. W., Kumar, P., Alharbi, M. G., (2020). Enhancement of Capacitated Transportation Problem in Fuzzy Environment. Advances in Fuzzy Systems, 9, 1-9.
[11] Poor Ofaghi, F., Darvishi Soloklaei, D., Saffar Ardabili, J., (2021). A New Approach to Finding the solution of Transportation Problems with Gray Parameters. Journal of Operations Research and Its Applications, Volume 18(2), 59-73.
[12] Attari, H., Nasseri, S. H., (2014). New concepts of feasibility and efficiency of solutions in fuzzy mathematical programming problems. Fuzzy Information and Engineering, 6(2), 203-221.
[13] Nasseri, S. H., Khabiri, B., (2010). A revised simplex algorithm for fuzzy number linear programming problem using linear ranking functions. International Journal of Mathematics and Computation, 8(10), 114-126.
[14] Nasseri, S. H., Ramzannia-Keshteli, G., (2018). A goal programming approach for fuzzy flexible linear programming problems. Iranian Journal of Operations research, 9(1), 1-28.
[15] Nasseri, S. H., Ebrahimnejad, A., Cao, B. Y., (2019). Application for the Flexible Linear Programming. In Fuzzy Linear Programming: Solution Techniques and Applications (pp. 223- 232). Springer, Cham.
[16] Nasseri, S. H., Verdegay, J. L., Mahmoudi, F., (2021). A New Method to Solve Fuzzy Interval Flexible Linear Programming Using a Multi-Objective Approach. Fuzzy Information and Engineering, 13(2), 248-265.
[17] Ramzannia-Keshteli, G., Nasseri, S. H., (2018). Solving flexible fuzzy multi-objective linear programming problems: Feasibility and efficiency concept of solutions. Punjab University Journal of Mathematics, 51(6), 19-31.
[18] Mahmoudi, F., (2019). A new solving approach for fuzzy flexible programming problem in uncertainty conditions, International Journal of Applied Operational Research, Vol. 9, 19-29.
[19] Nasseri, S.H., (2007). Fuzzy Simplex Methods for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. Journal of Operations Research and Its Applications, 4(13), 67-76.

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]

[20] Goodarzian, F., Shishebori, D., Nasseri, S. H., Dadva, F., (2021). A bi-objective production distribution problem in a supply chain network under grey flexible conditions. Rairo Operations Research, 55, S1287–S1316.
[21] Liu, S. T., Kao, C., (2004). Solving fuzzy transportation problems based on extension principle. European Journal of operational research, 153(3), 661-674.
[22] Hamdy, A. T., (2007). Operations research: An introduction. 8th Edition, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River.
[23] Behmanesh, E., Nasseri, S. H., (2013). An interactive method based on non-fuzzy parameterization to solve the problem of multi-objective transportation. Journal of Operations Research and its Applications, 10(3), 25-39.

[DOI: 10.52547/jamlu.19.3.29]