

## ساختار یک کلاس از روش‌های دوگامی با حافظه برای حل معادلات غیرخطی

ولی ترکاشوند<sup>۱\*</sup>

۱- دکتری، دانشگاه فرهنگیان، مرکز آموزش عالی شهید بهشتی، تهران، ایران

۲- دکتری، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۵ دی ۱۴۰۰

پذیرش مقاله: ۱۸ تیر ۱۴۰۱

### چکیده

در این مقاله یک روش دوگامی بهین مرتبه ۴ با دو پارامتر خودستابگر را برای حل معادلات غیرخطی ساخته‌ایم. در ادامه نیز با تقریب پارامترهای خودستابگر یک کلاس از روش‌های جدید با حافظه که کاراترین آنها مرتبه همگرایی  $6/37$  یعنی با  $59/37$  درصد بهبود مرتبه همگرایی را دارد، مطرح شده است. مزیت دیگر این روش‌های جدید این است که نیازی به محاسبه مشتق ندارند. با استفاده از این روش‌های شبه استیفنسن معادلات غیرخطی دارای ریشه ساده، با تقریب اولیه مناسب ریشه حل شده است تا درستی قضایای مطرح شده را با مثال‌های عددی نشان دهیم.

**کلمات کلیدی:** معادلات غیرخطی، روش با حافظه، پارامتر خودستابگر، درونیابی نیوتون.

### ۱ مقدمه

روش تکراری مرتبه دوم نیوتون<sup>[۱]</sup> معروف‌ترین روش برای حل معادلات غیرخطی است. اما نقطه ضعف آن محاسبه مشتق می‌باشد. این روش مشهور و معادله خطایش به صورت زیر می‌باشد:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

و معادله خطایش

$$e_{k+1} = c_r e_k + o(e_k), \quad c_r = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

می‌باشد. برای حل مشکل محاسبه مشتق، استیفنسن<sup>[۲]</sup> در سال ۱۹۳۳، مشتق مرتبه اول تابع را با تفاضل تقسیم شده مرتبه اول نیوتون تقریب زد:

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: torkashvand1978@gmail.com

$$f'(x_k) \approx f[x_k, w_k] = \frac{f(x_k) - f(w_k)}{x_k - w_k}.$$

و روش مرتبه دو خود را به صورت زیر ارایه نمود:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, w_k = x_k + f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

معادله خطای این روش بدون حافظه نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$e_{k+1} = (1 + f'(\alpha))c_r e_k^r + o(e_k^r), \quad c_r = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)},$$

شاخص کارایی هر دو روش فوق برابر است با

$$\sqrt{2} = 1/414$$

در ادامه حل معادلات غیرخطی روش‌های دوگامی مطرح شد. ۲۷ سال بعد، در سال ۱۹۶۰ مشهورترین روش دوگامی بدون حافظه را استروفسکی<sup>۳</sup> ارایه نمود [۳]. این روش به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \times \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}. \end{cases} \quad (3)$$

این روش دارای مرتبه همگرایی ۴ و معادله خطای آن به صورت زیر است:

$$e_{k+1} = (c_r^r - c_r c_r) e_k^r + O(e_k^\Delta), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k! f'(\alpha)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

۶ سال بعد از استروفسکی، جارات<sup>۴</sup> [۴] روش بدون حافظه دوگامی خود را به صورت زیر ارایه نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{1}{2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k) - 3f\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}. \end{cases} \quad (4)$$

این روش بهین دارای مرتبه همگرایی ۴ و معادله خطای آن به صورت زیر است:

$$e_{k+1} = \left( c_r^r - c_r c_r + \frac{c_r}{9} \right) e_k^r + O(e_k^\Delta).$$

در سال ۱۹۷۳، کینگ<sup>۵</sup> [۵] خانواده تک پارامتری خود را که روش استروفسکی نیز جزء آنهاست، به صورت زیر ارایه نمود:

<sup>1</sup> J.F. Steffensen

<sup>2</sup> A.M.Osrowski

<sup>3</sup> P.Jarrat

<sup>4</sup> R.F.King

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \times \frac{f(x_k) + \beta f(y_k)}{f(x_k) + (\beta - 1)f(y_k)}. \end{cases} \quad (5)$$

این روش بهین دارای مرتبه همگرایی <sup>۴</sup> است و معادله خطای آن بصورت زیر می باشد :

$$e_{k+1} = ((1+2\beta)c_r - c_r c_r)e_k^* + O(e_k^\delta).$$

در سال ۲۰۰۸، چان<sup>۱</sup> [۶] روش مرتبه چهار زیر را با استفاده از ایده تابع وزن ارایه نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ h(t_k) = h(0) + h'(0)t_k, h(0) = 1, h'(0) = -2, |h''(0)| < \infty, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k) \times h(t_k)}. \end{cases} \quad (6)$$

این روش نیز دارای مرتبه همگرایی <sup>۴</sup> و معادله خطای آن به صورت زیر است:

$$e_{k+1} = (c_r - c_r c_r)e_k^* + O(e_k^\delta).$$

در سال ۲۰۱۰ نیز لیو<sup>۲</sup> و همکاران [۷] روش مرتبه چهار زیر را ارایه نمودند:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, w_k = x_k + f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]} f(y_k). \end{cases} \quad (7)$$

شاخص کارایی روش‌های بهین مرتبه چهار فوق برابر است با [۳]:

$$\frac{1}{4^3} = 1/5874$$

افراد دیگری نیز روش‌های دوگامی بدون حافظه را برای حل معادلات غیرخطی به کار برند. از جمله می‌توان به کانگ<sup>۳</sup> - تراب<sup>۴</sup> [۸]، چان<sup>۱</sup> [۹]، کنسال<sup>۵</sup> و همکاران [۱۱]، کوردرو<sup>۶</sup> و همکاران [۱۲، ۱۳]، سلیمانی و همکاران [۱۴] و... اشاره نمود.

در ادامه این مقاله در بخش بعدی به بیان مساله پرداخته‌ایم و نیز در بخش سوم روش‌های دوگامی بهین بدون حافظه را با دو پارامتر خودستابگر معرفی خواهیم نمود. سپس در بخش چهارم روش‌های جدید با حافظه را با ۵۹/۳۷ درصد بهبود مرتبه همگرایی معرفی خواهیم نمود. در ادامه نیز در بخش پنج، صحت قضایای مطرح شده در بخش دو و سه را با ذکر مثال‌های عددی خواهیم دید. در پایان نیز نتیجه‌گیری را ملاحظه خواهیم کرد.

<sup>1</sup> C.Chun

<sup>2</sup> Zhongli Liu

<sup>3</sup> H.T.Kung

<sup>4</sup> J.F.Traub

<sup>5</sup> M.Kansal

<sup>6</sup> A.Cordero

## ۲ بیان مساله

در این پژوهش روش‌های با حافظه و بدون حافظه برای حل معادلات غیرخطی مورد توجه قرار گرفته است. از آنجا که بسیاری از معادلات غیرخطی دارای ریشه دقیق نمی‌باشند، برای حل این معادلات از روش‌های تکراری می‌توان استفاده نمود. این روش‌ها نوع قدیمی تر شان، روش‌های بدون حافظه هستند که شاخص کارایی پایین‌تری دارند. از این رو محققین و پژوهشگران این حوزه روش‌های با حافظه را که دارای کارایی بالاتری هستند، برای حل معادلات غیرخطی به کار گرفته‌اند. در این کار نیز معادلات غیرخطی با استفاده از این روش حل شده است. برای این منظور ابتدا روش بدون حافظه مطرح شده را با ورود پارامترهای خودشتابگر به یک روش با حافظه با کارایی بالاتر و نیز بهبود مرتبه همگرایی تبدیل کرده‌ایم و در ادامه نیز پارامتر و یا پارامترهای داده‌شده را تقریب زده‌ایم و به این ترتیب بدون افزایش هزینه محاسبات کارآیی روش را ارتقا داده‌ایم.

## ۳ روش‌های بدون حافظه

روش معرفی شده لیو و همکاران [۷] که یک روش بدون حافظه است را می‌توان با ورود یک پارامتر خودشتابگر به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, w_k = x_k + \gamma f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]} f(y_k). \end{cases} \quad (8)$$

این روش با سه فراخوانی ( $f(x_k), f(w_k), f(y_k)$ ) مرتبه همگرایی چهار دارد، از این‌رو طبق حدس کانگک-تراب بهین می‌باشد. قضیه زیر خطای روش بهین دوگامی بدون حافظه (۸) را مشخص می‌کند.

$$e_{n+1} = (1 + \gamma f'(\alpha)) c_r ((2 + \gamma f'(\alpha)) c_r - (1 + \gamma f'(\alpha)) c_r e_n^r + O(e_n^{\diamond})). \quad (9)$$

$$\text{که } c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n! f'(\alpha)}, n = 2, 3, \dots$$

### قضیه ۱-۳

فرض کنید  $\alpha \in I$  ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر  $f : I \subseteq R \rightarrow R$  روى بازه‌ی باز  $I$  باشد. اگر  $x$  به اندازه کافی به ریشه  $\alpha$  نزدیک باشد، آنگاه روش (۸) دارای حداقل مرتبه همگرایی ۴ بوده و در معادله خطای (۹) صدق می‌کند.

**برهان:** فرض کنید  $e_k = x_k - \alpha, e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha, e_{k,y} = y_k - \alpha, e_{k,w} = w_k - \alpha$

با استفاده از بسط تیلور تابع  $f$  حول نقطه‌ی  $x_n = \alpha$  و با فرض  $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k! f'(\alpha)}$  داریم:

$$f(x_k) = f'(\alpha) \left[ e_k + c_r e_k^r + c_r e_k^r + c_r e_k^r + O(e_k^{\diamond}) \right] \quad (10)$$

$$e_{k,w} = e_k + \gamma f(e_k) = e_k + \gamma f'(\alpha) e_k \left( 1 + c_r e_k + c_r^r e_k^r + c_f e_k^f \right) + O(e_k^f) \quad (11)$$

از رابطه‌ی (۱۰) و رابطه‌ی (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} f(e_{k,w}) &= f'(\alpha)(e_k + f'(\alpha)\gamma(e_k + e_k^r c_r + e_k^r c_r^r + e_k^f c_f)) + c_r \left( e_k + f'(\alpha)\gamma(e_k + e_k^r c_r + e_k^r c_r^r + e_k^f c_f) \right)^r \\ &\quad + c_r \left( e_k + f'(\alpha)\gamma(e_k + e_k^r c_r + e_k^r c_r^r + e_k^f c_f) \right)^r + c_f \left( e_k + f'(\alpha)\gamma(e_k + e_k^r c_r + e_k^r c_r^r + e_k^f c_f) \right)^f \end{aligned} \quad (12)$$

از این رو می‌توان  $f[x_k, w_k]$  را با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۲) به صورت زیر نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} f[x_k, w_k] &= -\frac{1}{e_k f'(\alpha) \gamma (1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_f)} (e_k f'(\alpha) (1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_f) \\ &\quad f'(\alpha) (e_k + e_k f'(\alpha) \gamma (1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_f)) + c_r \left( e_k + e_k f'(\alpha) \gamma (1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_f) \right)^r) \\ &\quad + c_r \left( e_k + e_k f'(\alpha) \gamma (1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_f) \right)^r + c_f \left( e_k + e_k f'(\alpha) \gamma (1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_f) \right)^f \end{aligned} \quad (13)$$

اکنون با تقسیم رابطه (۱۰) بر رابطه (۱۳) و همچنین معادله خطای نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} e_{k,y} &= (1 + f'(\alpha)\gamma) c_r e_k^r + \left( -(\gamma + \gamma f'(\alpha)\lambda + f'(\alpha)^r \gamma^r) c_r^r + (\gamma + \gamma f'(\alpha)\gamma + f'(\alpha)^r \gamma^r) c_r \right) e_k^r + \\ &\quad \left( \gamma + \gamma f'(\alpha)\gamma + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r + f'(\alpha)^r \gamma^r \right) c_r^r - \left( \gamma + \gamma f'(\alpha)\gamma + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r \right) c_r c_r^r \\ &\quad + \left( \gamma + \gamma f'(\alpha)\gamma + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r + f'(\alpha)^r \gamma^r \right) c_f e_k^f + O(e_k^{\Delta}) \end{aligned} \quad (14)$$

از رابطه (۱۴) می‌توان  $f(y_k)$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\alpha) (1 + f'(\alpha)\gamma) c_r e_k^r + \\ &\quad f'(\alpha) \left( -\gamma c_r^r - \gamma f'(\alpha)\gamma c_r^r + f'(\alpha)^r \gamma^r c_r^r + \gamma c_r + \gamma f'(\alpha)\gamma c_r + f'(\alpha)^r \gamma^r c_r \right) e_k^r + \\ &\quad f'(\alpha) \left( \gamma c_r^r + \gamma f'(\alpha)\gamma c_r^r + \gamma c_r^r + f'(\alpha)^r \gamma^r c_r^r + c_r \left( c_r + f'(\alpha)\gamma c_r \right)^r - \gamma c_r c_r - \gamma f'(\alpha)\gamma c_r c_r \right. \\ &\quad \left. - \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r c_r c_r - \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r c_r + \gamma c_r + \gamma f'(\alpha)\gamma c_r + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r c_r + f'(\alpha)^r \gamma^r c_r \right) e_k^f + O(e_k^{\Delta}) \end{aligned} \quad (15)$$

از روابط (۱۰)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned} e_{k,y} &= (1 + f'(\alpha)\gamma) c_r e_k^r + \left( -(\gamma + \gamma f'(\alpha)\lambda + f'(\alpha)^r \gamma^r) c_r^r + (\gamma + \gamma f'(\alpha)\gamma + f'(\alpha)^r \gamma^r) c_r \right) e_k^r + \\ &\quad \left( \gamma + \gamma f'(\alpha)\gamma + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r + f'(\alpha)^r \gamma^r \right) c_r^r - \left( \gamma + \gamma f'(\alpha)\gamma + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r \right) c_r c_r^r \\ &\quad + \left( \gamma + \gamma f'(\alpha)\gamma + \gamma f'(\alpha)^r \gamma^r + f'(\alpha)^r \gamma^r \right) c_f e_k^f + O(e_k^{\Delta}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 f[y_k, w_k] = & f'(\alpha) + (1+f'(\alpha)\gamma)c_r e_k + f'(\alpha)\left((1+2f'(\alpha)\gamma)c_r^r + (1+f'(\alpha)\gamma)^r c_r\right)e_k^r + \\
 & f'(\alpha)\left(-(2+f'(\alpha)\gamma(2+f'(\alpha)\gamma))c_r^r + (1+2f'(\alpha)\gamma)(3+2f'(\alpha)\gamma)c_r c_r + (1+f'(\alpha)\gamma)^r c_r\right)e_k^r + \\
 & f'(\alpha)\left(4+f'(\alpha)\gamma(5+f'(\alpha)\gamma(3+f'(\alpha)\gamma))\right)c_r^r - (8+f'(\alpha)\gamma)(11+f'(\alpha)\gamma(7+3f'(\alpha)\gamma))c_r c_r + \\
 & (1+f'(\alpha)\gamma)(2+f'(\alpha)\gamma)(5+f'(\alpha)\gamma)c_r^r + (4+f'(\alpha)\gamma(13+f'(\alpha)\gamma))c_r c_r + (1+f'(\alpha)\gamma)^r c_5) e_k^r + O(e_k^5)
 \end{aligned} \tag{17}$$

در نهایت با استفاده از روابط (۱۰) الی (۱۷) خواهیم داشت:

$$e_{n+1} = (1+\gamma f'(\alpha))c_r((2+\gamma f'(\alpha))c_r^r - (1+\gamma f'(\alpha))c_r e_n^r) + O(e_n^5).$$

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد.  $\square$

روش لیو و همکاران را می‌توان با ورود دو پارامتر خودستابگر به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k] + \beta f(w_k)}, w_k = x_k + \gamma f(x_k), \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^r} f(y_k), k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{18}$$

قضیه ۲-۲ معادله خطی روش بهین دوگانه بدون حافظه (۱۸) را نشان می‌دهد.

### قضیه ۲-۳

فرض کنید  $\alpha \in I$  ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر  $I \subseteq R \rightarrow R$  باز  $I$  باشد. اگر  $x$  به اندازه کافی به ریشه  $\alpha$  نزدیک باشد، آنگاه روش (۱۰) دارای حداقل مرتبه همگرایی ۴ بوده و در معادله خطی زیر صدق می‌کند:

$$e_{n+1} = (1+\gamma f'(\alpha))(\beta + c_r)(\beta(1+\gamma f'(\alpha))c_r + (2+\gamma f'(\alpha))c_r^r - (1+\gamma f'(\alpha))c_r e_n^r) + O(e_n^5) \tag{19}$$

اثبات: روش اثبات مشابه قضیه قبل می‌باشد. با استفاده از برنامه زیر که با استفاده از نرم افزار Mathematica نوشته شده است، قضیه اثبات می‌شود:

```

Clear["Global`*"]
f[e_] = fla*(e + c_r e_n^r + c_r e_n^r + c_r e_n^r);
ew = e + \gamma[f[e], {e, 0, 4}];
ey = e - Series[\frac{f[e]}{f[e, ew] + \beta f[ew]}, {e, 0, 4}];
e1 = ey - Series[\frac{(f[e, ey] - f[ey, ew] + f[e, ew])}{f[e, ey]^r} f[ey], {e, 0, 4}] // FullSimplify

```

خروجی این برنامه به صورت زیر است:

$$e_{n+1} = (1 + \gamma f'(\alpha)) \left( \beta + c_r \right) (\beta (1 + \gamma f'(\alpha)) c_r + (2 + \gamma f'(\alpha)) c_r - (1 + \gamma f'(\alpha)) c_r e_n + O(e_n^2))$$

و به این ترتیب اثبات این قضیه نیز به پایان می‌رسد.  $\square$

در ادامه این مقاله در بخش سوم روش‌های با حافظه را مورد بررسی قرار خواهیم داد. لازم به ذکر است روش‌های با حافظه را با همان تعداد ارزیابی روش‌های بدون حافظه، با ورود پارامترهای خود شتابگر و نیز تقریب آنها با استفاده از اطلاعات قبل خواهیم ساخت که مرتبه همگرایی و نیز به تبع آن شاخص کارایی بالاتری دارند.

#### ۴ ساختار روش‌های با حافظه جدید

این بخش شامل دو بخش است. ابتدا خانواده روش‌های تک پارامتری مطرح می‌شود، سپس در بخش دوم نیز روش‌های دو پارامتری را برای حل معادلات غیرخطی مطرح خواهیم کرد.

##### ۴-۱ خانواده روش‌های تک پارامتری با حافظه

با ملاحظه رابطه (۹) متوجه خواهیم شد که مرتبه روش داده شده (۸)، چهار خواهد بود. اگر

$$(1 + \gamma f'(\alpha)) \neq 0.$$

حال اگر داشته باشیم:

$$\gamma = \frac{-1}{f'(\alpha)}.$$

آنگاه معادله خطای روش (۸) بیش از چهار خواهد بود از آنجایی که  $\alpha$ ، ریشه دقیق معادله، در دسترس نیست پس مقدار  $\gamma$  قابل محاسبه دقیق نخواهد بود. اما به جای آن می‌توان از تقریب  $f'(\alpha) \approx \overline{f'(\alpha)}$  استفاده نمود. از این رو ما با استفاده از تقریب زیر

$$\gamma = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}}$$

روش‌های با حافظه تک پارامتری و نیز دو پارامتری با مرتبه همگرایی  $5/2261, 4/2361, 4/5616, 4/2361, 4/7892$  و  $4/7892$  خواهیم ساخت.

اگر پارامتر  $\gamma = \frac{-1}{f'(\alpha)}$  را به صورت‌های زیر تقریب بزنیم، روش‌های با حافظه با مرتبه‌های همگرایی مختلف را به دست خواهیم آورد:

الف- روش تقریب سکانت:

$$\overline{f'(\alpha)} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \quad (20)$$

ب- روش تقریب بهبود یافته سکانت:

$$\overline{f'(\alpha)} = \frac{f(x_k) - f(y_{k-1})}{x_k - y_{k-1}}. \quad (21)$$

ج- روش تقریب نیوتن:

$$\overline{f'(\alpha)} = N_r(x_k), \quad N_r(t) = N_r(t; x_k, y_{k-1}, x_{k-1}). \quad (22)$$

که  $N_r(x_k)$  چندجمله‌ای درونیاب درجه ۲ نیوتن با استفاده از نقاط  $x_k, y_{k-1}, x_{k-1}$  می‌باشد. لازم به ذکر است این نقاط معلوم می‌باشند.

د- روش نیوتن:

$$N'_r(x_k) \text{ که } \overline{f'(\alpha)} = N'_r(x_k), \quad N_r(t) = N_r(t; x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}). \quad (23)$$

چندجمله‌ای درونیاب درجه ۳ نیوتن از بین نقاط معلوم  $x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}$  می‌باشد. لازم به ذکر است با این نقاط بهترین چندجمله‌ای تقریب زده خواهد شد.

پس پارامتر شتابگر  $\gamma_k = \gamma$  را به صورت های زیر می‌توان تعیین نمود:

الف- روش تقریب سکانت:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \quad (24)$$

ب- روش تقریب بهبود یافته سکانت:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = -\frac{x_k - y_{k-1}}{f(x_k) - f(y_{k-1})}. \quad (25)$$

ج- روش تقریب نیوتن:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-1}{N_r(x_k)}. \quad (26)$$

$N_r(t) = f(x_k) + f[x_k, y_{k-1}](t - x_k) + f[x_k, y_{k-1}, x_{k-1}](t - x_{k-1})(t - y_{k-1})$  که

د- روش نیوتن:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-1}{N'_r(x_k)}. \quad (27)$$

که

$$N_r(t) = f(x_k) + f[x_k, y_{k-1}](t - x_k) + f[x_k, y_{k-1}, w_{k-1}](t - y_{k-1})(t - w_{k-1}) \\ + f[x_k, y_{k-1}, w_{k-1}, x_{k-1}](t - y_{k-1})(t - w_{k-1})(t - x_{k-1}).$$

حال اگر پارامتر خودشتابگر  $\gamma_k$  را با استفاده از یکی از روش‌های فوق تعیین کنیم، روش‌های با حافظه زیر را خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, k = 1, 2, 3, \dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]} f(y_k). \end{array} \right. \quad (28)$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = -\frac{x_k - y_{k-1}}{f(x_k) - f(y_{k-1})}, k = 1, 2, 3, \dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]} f(y_k). \end{array} \right. \quad (29)$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = -\frac{1}{N_r(x_k)}, k = 1, 2, 3, \dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]} f(y_k). \end{array} \right. \quad (30)$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = -\frac{1}{N_r(x_k)}, k = 1, 2, 3, \dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]} f(y_k). \end{array} \right. \quad (31)$$

#### قضیه ۱-۴

فرض کنید  $\alpha \in I$  ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر  $f : I \subseteq R \rightarrow R$  روی بازه  $I$  باشد. اگر  $x$  به اندازه کافی به ریشه  $\alpha$  نزدیک باشد، آنگاه مرتبه همگرایی روش های (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) به ترتیب برابر است با:  $4/2361$ ،  $4/5616$ ،  $4/7912$  و  $5/2261$ .

**اثبات مرتبه همگرایی رابطه (۲۸):** نشان می دهیم مرتبه همگرایی روش تک پارامتری با حافظه (۲۸) حداقل برابر است با:

$$2 + \sqrt{5}$$

با استفاده از بسط مک لورن تابع ( $x$ )  $f$  حول نقطه  $x = \alpha$  خواهیم داشت:

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2 f''(\alpha)}{2!} + \frac{(x - \alpha)^3 f'''(\alpha)}{3!} + \dots \quad (32)$$

حال با استفاده از روابط (۲۴) داریم:

$$f(x_k) = f(\alpha) + (x_k - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2 f''(\alpha)}{2!} + \frac{(x_k - \alpha)^3 f'''(\alpha)}{3!} + \dots \quad (33)$$

و

$$f(x_{k-1}) = f(\alpha) + (x_{k-1} - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_{k-1} - \alpha)^2 f''(\alpha)}{2!} + \frac{(x_{k-1} - \alpha)^3 f'''(\alpha)}{3!} + \dots \quad (34)$$

با استفاده از روابط (۳۳) و (۳۴) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} &= \frac{(e_k - e_{k-1})f'(\alpha) + \frac{(e_k - e_{k-1})f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k - e_{k-1})f'''(\alpha)}{3!} + \dots}{e_k - e_{k-1}} \\ &= f'(\alpha) + \frac{(e_k + e_{k-1})f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k + e_k + e_{k-1} + e_{k-1})f'''(\alpha)}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

و با استفاده از رابطه (۲۴) داریم:

$$\gamma_k = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{-1}{f'(\alpha) + (e_k + e_{k-1})\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k + e_k e_{k-1} + e_{k-1})f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \quad (36)$$

حال برای محاسبه  $(f'(\alpha) + \gamma_k)$  با استفاده از رابطه (۳۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_k f'(\alpha)) &= 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha) + (e_k + e_{k-1})\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k + e_k e_{k-1} + e_{k-1})f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \\ &= \frac{(e_k + e_{k-1})c_r + (e_k^r + e_k e_{k-1} + e_{k-1}^r)c_r + \dots}{1 + (e_k + e_{k-1})c_r + (e_k^r + e_k e_{k-1} + e_{k-1}^r)c_r + \dots} \sim c_r e_{k-1} \end{aligned} \quad (37)$$

از رابطه (۳۷) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha))e_k^*, \\ e_{k,y} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha))e_k^r, \\ e_{k,w} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha))e_k. \end{cases} \quad (38)$$

در ادامه فرض کنید دنباله های  $\{x_k\}$ ,  $\{y_k\}$  و  $\{w_k\}$  همگرا با مرتبه همگرایی  $r_1, r_2$  و  $r$  باشند، داریم:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^{r^r}, \\ e_{k,y} \sim e_k^{r^r} \sim e_{k-1}^{rr}, \\ e_{k,w} \sim e_k^{r^r} \sim e_{k-1}^{rr}. \end{cases} \quad (39)$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (۳۸) و (۳۹) به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr - 1 - r = 0, \\ rr - 1 - 2r = 0, \\ r^r - 1 - 4r = 0. \end{cases} \quad (40)$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = -1 + \sqrt{5} \sim 1/2361, \\ r_2 = \sqrt{5} \sim 2/2361, \\ r = 2 + \sqrt{5} \sim 4/2361. \end{cases}$$

**اثبات مرتبه همگرایی روش (۲۹):** با استفاده از رابطه (۳۲) خواهیم داشت:

$$f(y_{k-1}) = f(\alpha) + (y_{k-1} - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(y_{k-1} - \alpha)^r f''(\alpha)}{2!} + \frac{(y_{k-1} - \alpha)^{r^r} f'''(\alpha)}{3!} + \dots \quad (41)$$

با استفاده از رابطه  $x_k - y_{k-1} = e_k - e_{k-1,y}$  و نیز رابطه های (۳۳) و (۴۱) رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\gamma_k = -\frac{x_k - y_{k-1}}{f(x_k) - f(y_{k-1})} = \frac{-1}{f'(\alpha) + (e_k + e_{k-1,y}) \frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k^r + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^r) f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \quad (42)$$

حال برای محاسبه  $(1 + \gamma_k f'(\alpha))$  با استفاده از رابطه (۴۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_k f'(\alpha)) &= 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha) + (e_k + e_{k-1,y}) \frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k^r + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^r) f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \\ &= \frac{(e_k + e_{k-1,y}) c_r + (e_k^r + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^r) c_r + \dots}{1 + (e_k + e_{k-1,y}) c_r + (e_k^r + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^r) c_r + \dots} \sim c_r e_{k-1,y} \end{aligned} \quad (43)$$

از رابطه (۴۳) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r \\ e_{k,y} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^{r^r} \\ e_{k,w} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k \end{cases} \quad (44)$$

در ادامه فرض کنید دنباله های  $\{x_k\}$ ,  $\{y_k\}$ ,  $\{w_k\}$  و  $\{r_k\}$  همگرا با مرتبه همگرایی  $r$  باشند، داریم:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^{r^r} \\ e_{k,y} \sim e_k^{r_y} \sim e_{k-1}^{rr_y} \\ e_{k,w} \sim e_k^{r_w} \sim e_{k-1}^{rr_w} \end{cases} \quad (45)$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (۴۴) و (۴۵) به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr_1 - r_r - r = 0, \\ rr_r - r_r - 2r = 0, \\ r^r - r_r - 4r = 0. \end{cases} \quad (46)$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{4} (9 - \sqrt{17}) \cong 1/2192, \\ r_r = \frac{1}{4} (5 + \sqrt{17}) \cong 2/5616, \\ r = \frac{1}{2} (5 + \sqrt{17}) \cong 4/5616. \end{cases}$$

اثبات همگرایی روش (۳۰): کاملاً مشابه روش (۲۹) است.

اثبات همگرایی روش (۳۱):

با استفاده از برنامه کاربردی زیر در نرم افزار Mathematica

```
ClearAll["Global`*"]
A[t_]:=InterpolatingPolynomial[{{e,fx},{ew,fw},{ey,fy},{e1,fx1}},t]
Approximation=-1/A'[e1]/Simplify;
fx=fla*(e+c2*e^2+c3*e^3+c4*e^4);
fw=fla*(ew+c2*ew^2+c3*ew^3+c4*ew^4);
fy=fla*(ey+c2*ey^2+c3*ey^3+c4*ey^4);
fx1=fla*(e1+c2*e1^2+c3*e1^3+c4*e1^4);
γ=Series[Approximation,{e,0,2},{ew,0,2},{ey,0,2},{e1,0,0}]//Simplify;
Collect[Series[+1+γ*fla,{e,0,1},{ew,0,1},{ey,0,1},{e1,0,0}],{e,ew,ey,e1},Simplify]
```

خروجی این برنامه به صورت زیر است.

$$c_r e e w e y$$

از این خروجی برای محاسبه  $(\alpha)f'(\alpha) + \gamma f(\alpha)$  و استفاده از رابطه (۲۷) خواهیم داشت:

$$(1 + \gamma_k f'(\alpha)) \sim c_r e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y}. \quad (47)$$

از رابطه (۴۷) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r, \\ e_{k,y} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r, \\ e_{k,w} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r. \end{cases} \quad (48)$$

در ادامه فرض کنید دنباله‌های  $\{x_k\}$  و  $\{y_k\}$  همگرا با مرتبه همگرایی  $r_1, r_2$  و  $r$  باشند، داریم:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^{r_1}, \\ e_{k,y} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{r_2}, \\ e_{k,w} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{r_2}. \end{cases} \quad (49)$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (48) و (49) مساوی قرار دادن توان‌های  $e_{k,w}, e_{k,y}$  و  $e_{k+1}$  به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr_1 - 1 - r_1 - r_2 - r = 0, \\ rr_2 - 1 - r_1 - r_2 - 2r = 0, \\ r_1 - 1 - r_1 - r_2 - 4r = 0. \end{cases} \quad (50)$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = 1 + \sqrt{5} \cong 2/2361, \\ r_2 = \sqrt{5} \cong 3/2361, \\ r = 3 + \sqrt{5} \cong 5/2361. \end{cases}$$

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد.  $\square$

اکنون می‌توانیم گزاره‌های زیر را بیان کنیم.

#### گزاره ۱-۴

مرتبه همگرایی روش‌های با حافظه (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) به ترتیب برابر است با:  $4/2361, 4/5616, 4/7912$  و  $5/2361$ . از این رو شاخص کارایی آنها به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4/2361} = 1/6181, \\ \sqrt[3]{4/5616} = 1/6585, \\ \sqrt[3]{4/7912} = 1/6858, \\ \sqrt[3]{5/2361} = 1/7365. \end{cases}$$

#### گزاره ۲-۴

هریک از روش‌های با حافظه (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) که به ترتیب  $1/2361, 0/5616, 0/7912$  و  $0/2361$  بهبود مرتبه همگرایی روش بدون حافظه (۸) را داشته‌اند، میزان بهبود همگرایی به ترتیب زیر دارند:

$$0.5/91, 0.78/19, 0.9/14 و 0.94/10.$$

#### ۴-۲ روش‌های با حافظه دوپارامتری

حال برای ساخت روش دوگانه با حافظه دو پارامتری جدید به صورت زیر عمل خواهیم نمود. با ملاحظه رابطه (۱۹) متوجه خواهیم شد که مرتبه روش داده شده (۱۸)، چهار خواهد بود، اگر

$$(1 + \gamma f'(\alpha)) \neq 0, \quad (\beta + c_r) \neq 0.$$

از این رو اگر داشته باشیم:

$$\gamma = \frac{-1}{f'(\alpha)}, \quad \beta = -c_r = \frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

آنگاه معادله خطای روش (۱۸) بیش از چهار خواهد بود. از آنجایی که  $\alpha$ ، ریشه‌ی دقیق معادله در دسترس نیست، پس مقدار  $\beta$ ,  $\gamma$  قابل محاسبه دقیق نخواهد بود. اما به جای آن می‌توان از تقریب‌های زیر

$$\overline{f'(\alpha)} \approx \overline{f'(a)}, \quad \overline{f''(\alpha)} \approx \overline{f''(a)}.$$

استفاده نمود. از این رو می‌توان تقریب‌های زیر

$$\gamma = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}}, \quad \beta = \frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}}.$$

را نظر گرفت. در ادامه این بخش روش‌های با حافظه دو پارامتری با مرتبه همگرایی ۶/۳۷ ساخته می‌شود.

$$\text{اگر پارامترهای } \gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}}, \quad \beta_k = \frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}} \text{ که}$$

$$\overline{f'(\alpha)} = N'_r(x_k), \quad N_r(t; x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}). \quad (51)$$

$$\overline{f''(\alpha)} = N'_r(x_k), \quad N_r(t; w_k, x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}). \quad (52)$$

پس پارامترهای  $\gamma_k = \gamma$ ,  $\beta_k = \beta$  را به صورت بازگشتی زیر می‌توان تعیین نمود:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-1}{N'_r(x_k)}, \quad \beta_k = \frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-N''_r(w_k)}{2N'_r(w_k)}. \quad (53)$$

در حالی که

$$\begin{aligned} N_r(t) &= f(x_k) + f[x_k, y_{k-1}](t - x_k) + f[x_k, y_{k-1}, w_{k-1}](t - y_{k-1})(t - w_{k-1}) \\ &\quad + f[x_k, y_{k-1}, w_{k-1}, x_{k-1}](t - y_{k-1})(t - w_{k-1})(t - x_{k-1}) \\ &\quad + f[w_k, x_k, y_{k-1}, w_{k-1}, x_{k-1}](t - x_k)(t - y_{k-1})(t - w_{k-1})(t - x_{k-1}). \end{aligned}$$

و با تعیین پارامترهای  $\gamma_k$ ,  $\beta_k$  با استفاده از روش فوق، روش‌های با حافظه زیر را خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = \frac{-1}{N_r(x_k)}, \beta_k = \frac{-N'_r(w_k)}{\gamma N'_r(w_k)} \quad k=1,2,3,\dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k] + \beta_k f(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]} f(y_k). \end{array} \right. \quad (54)$$

**قضیه ۴**

فرض کنید  $\alpha \in I$  ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر  $R \rightarrow R$  :  $I \subseteq R$  روی بازه‌ی باز  $I$  باشد. اگر  $x$  به اندازه کافی به ریشه  $\alpha$  نزدیک باشد، آنگاه مرتبه همگرایی روش (۵۴) برابر است با  $6/37$ .

**اثبات:** مشابه قضیه قبل داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \gamma_k f'(\alpha)) \sim c_r e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y}, \\ (\beta_k + c_r) \sim c_r e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y}. \end{array} \right. \quad (55)$$

از رابطه (۵۵) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{k+1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r \sim e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y} e_k^r, \\ e_{k,y} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r \sim e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y} e_k^r, \\ e_{k,w} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k \sim e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y} e_k. \end{array} \right. \quad (56)$$

با فرض این که دنباله‌های  $\{x_k\}$ ,  $\{w_k\}$ ,  $\{y_k\}$  و  $\{e_k\}$  همگرا با مرتبه همگرایی  $r_1, r_r$  و  $r$  باشند، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{k+1} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^{r_r}, \\ e_{k,y} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^{rr_r}, \\ e_{k,w} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^{rr}. \end{array} \right. \quad (57)$$

با استفاده از جفت روابط (۵۶) و (۵۷) و مساوی قرار دادن توان‌های  $e_{k,w}$ ,  $e_{k,y}$  و  $e_{k+1}$  به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\left\{ \begin{array}{l} rr_1 - 1 - r_1 - r_r - r = 0, \\ rr_r - 2 - 2r_1 - 2r_r - 2r = 0, \\ r^r - 2 - 2r_1 - 2r_r - 4r = 0. \end{array} \right. \quad (58)$$

که جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{33}) \sim 2/1861, \\ r_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{33}) \sim 4/3723, \\ r = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{33}) \sim 6/3723. \end{cases}$$

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد.  $\square$

### گزاره ۴-۳

شاخص کارایی روش با حافظه (۵۴) برابر است با  $\sqrt[3]{6/3723} = 1/854^0$ . از آنجاکه این روش مرتبه همگرایی را از ۴ به  $6/3723$  رسانده است، پس میزان بهبود مرتبه همگرایی آن،  $59/37\%$  می‌باشد.

مطالعه بیشتر روش‌های با حافظه چندگامی را در مراجع ذکر شده زیر می‌توانید مشاهده نمایید. نتا<sup>۱</sup> [۱۵]، لاله چینی و همکاران [۱۶]، ترکاشوند و همکاران [۱۷]، پتکوویچ<sup>۲</sup> و همکاران [۱۹، ۲۰]، ونگ<sup>۳</sup> [۲۱]، سلیمانی و همکاران [۲۲] و کوردره و همکاران [۲۳] و ... .

علاوه بر این عهدی اقدم و همکارانش رضاپور و قوسی نیز روش‌های بدون حافظه را در مراجع [۲۹، ۳۰] مطالعه نمودند.

ترکاشوند و همکاران کاربردی از این روش‌ها را در تعیین مقادیر ویژه ماتریس‌ها به کار برده‌اند [۳۱]. علاوه بر این، ترکاشوند و همکاران، دینامیک روش‌های تکراری و همگرایی موضعی و نیمه‌موضعی آنها را مورد بررسی قرار داده‌اند. [۳۲، ۳۳]

در بخش بعدی مقایسه بهبود مرتبه همگرایی و نیز شاخص کارایی روش‌های جدید را با دیگر روش‌های با حافظه و بدون حافظه خواهیم دید.

### ۵ مثال‌های عددی

در جدول ۱ پنج معادله غیرخطی همراه ریشه‌ی دقیق و حدس اولیه ریشه را مشاهده می‌نمایید. در جدول ۲، میزان بهبود همگرایی، روش‌های جدید با دیگر روش‌های با حافظه مقایسه شده است. در جدول‌های ۳ تا ۷ مقدار خطای مرتبه اول تا سوم و نیز مرتبه همگرایی و شاخص کارایی روش‌های مختلف مقایسه شده‌اند. جدول ۸ نیز شاخص کارایی و مرتبه همگرایی روش‌های با حافظه و بدون حافظه را نشان می‌دهد. حدس اولیه‌ی ریشه هر معادله در همگرایی روش عددی مطرح شده نقشی اساسی دارد. برای مطالعه بیشتر حدس اولیه به مرجع [۲۸] مراجعه شود. تمامی محاسبات با استفاده از نرم افزار Mathematica با دقت  $10^{-10}$  انجام شده است. عبارات زیر در تمامی جدول‌ها استفاده شده است:

<sup>1</sup> B. Netta

<sup>2</sup> M.S. Petkovic

<sup>3</sup> X. Wang

- الف -  $x$  مقدار حدس ریشه اولیه معادله غیرخطی  $f(x) = 0$ .
- ب -  $\alpha$  ریشه دقیق معادله غیرخطی  $f(x) = 0$ .
- پ - عبارت  $|x_n - \alpha|$  نشان‌دهنده مقدار خطای مرحله  $n$  ام از ریشه معادله.
- ت - عبارت  $m(-n)$  نشان‌دهنده  $m \times 10^{-n}$  می‌باشد.

ث - شاخص کارایی فرمول استروفسکی  $IE = r^{\frac{1}{\theta_f}}$  استفاده شده که  $\theta_f$  تعداد ارزیابی از تابع و یا مشتق‌های آن و  $r$  مرتبه همگرایی روش تکراری داده شده است.

$$r_c = \frac{\log\left(\left|\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)}\right|\right)}{\log\left(\left|\frac{f(x_k)}{f(x_{k-1})}\right|\right)}$$

ج - مرتبه همگرایی محاسباتی:

جدول ۱. مثال‌های عددی بررسی شده

تابع بررسی شده	ریشه معادله	حدس اولیه
$f_1(x) = x \log(1 + x \sin x) + e^{-1+x^r+x \cos x} \sin \pi x$	$\alpha = 0$	$x_0 = 0/6$
$f_2(x) = 1 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x} - x^r$	$\alpha = 1$	$x_0 = 1/4$
$f_3(x) = (x - 2)(x^{10} + x + 2)e^{-\Delta x}$	$\alpha = 2$	$x_0 = 2/2$
$f_4(x) = e^{x^r - x} - \cos(x^r - 1) + x^r + 1$	$\alpha = -1$	$x_0 = -1/4$
$f_5(x) = \log(1 + x^r) + e^{-rx+x^r} \sin x$	$\alpha = 0$	$x_0 = 0/6$

جدول ۲. مقایسه درصد بهبود مرتبه همگرایی روش جدید با دیگر روش‌های با حافظه

نام روش با حافظه	تعداد گام	تعداد ارزیابی	تعداد روش بدون حافظه بهین	مرتبه روش بدون حافظه بهین	مرتبه همگرایی	درصد بهبود مرتبه همگرایی
Petkovic et al (۲۰۱۰) [۲۰]	۲	۳	۴	۴/۲۳۶۱	% ۵/۹	
Petkovic et al (۲۰۱۰) [۲۰]	۲	۳	۴	۴/۴۴۹۵	% ۱۱/۲۴	
Soleymani et al (۲۰۱۵) [۲۲]	۳	۴	۸	۱۲	% ۵۰	
Dzunic-Petkovic (۲۰۱۲) [۲۶]	۱	۲	۲	۳	% ۵۰	
Traub (۱۹۶۴) [۲۵]	۱	۲	۲	۲/۴۵۷۱	% ۲۰/۵	
Lalehchini et al (۲۰۲۰) [۱۶]	۲	۳	۴	۶	% ۵۰	
Sharifi et al (۲۰۱۶) [۲۸]	۳	۴	۸	۱۲	% ۵۰	
Wang (۲۰۱۸) [۲۱]	۲	۳	۴	۴/۴۴۹۵	% ۱۱/۲۴	
Wang (۲۰۱۸) [۲۱]	۲	۳	۴	۴/۲۳۶۱	% ۵/۹	
(روش ۲۸)	۲	۳	۴	۴/۲۳۶۱	% ۵/۹	
(روش ۲۹)	۳	۴	۴	۴/۵۶۱۶	% ۱۴/۰۴	

روش (۳۰)	۲	۳	۴	۴/۷۹۱۲	% ۱۹/۷۸
روش (۳۱)	۲	۳	۴	۵/۲۳۶۱	% ۳۰/۹۰
روش (۵۴)	۲	۳	۴	۶/۳۷۲۳	% ۵۹/۳۱

جدول ۳. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_r(x) = x \log(1 + x \sin x) + e^{-1+x^r+x \cos x} \sin \pi x$					
روش‌های بررسی شده	$ x_1 - \alpha $	$ x_r - \alpha $	$ x_{r'} - \alpha $	$r_c$	IE
Newton [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۱۵۹۱۰(۰)	۰/۲۴۴۷۶(-۱)	۲/۰۰۰۱	۱/۴۱۴۳
Steffensen [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۸۶۲۹۶(۰)	۰/۱۳۷۶۸(۱)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۳۳۶۳۷(۰)	۰/۴۰۰۷۷(-۱)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebychev	۰/۶۰۰۰۰(۱)	۰/۱۲۶۷۶(۱)	۰/۱۱۲۸۲(۱)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۴۴۳۷۷(۰)	۰/۱۰۰۲۸(-۲)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_1 = ۰/۳$ , $x_r = ۰/۶$	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۴۴۲۶۴(-۱)	۰/۱۲۷۸۹(-۱)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_r = ۰/۱$ [۲۵]	۰/۴۷۸۱۱(۰)	۰/۵۶۲۳۰(-۱)	۰/۱۲۶۰۲(-۲)	۲/۴۸۲۵	۱/۵۷۵۶
(۲۸), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۲۵۱۲۶(۰)	۰/۱۱۲۷۶(-۲)	۰/۳۶۸۱۲(-۱۲)	۴/۲۳۵۷	۱/۶۱۸۰
(۲۹), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۲۵۱۲۶(۰)	۰/۱۰۶۶۷(-۲)	۰/۲۲۹۷۸(-۱۳)	۴/۵۶۱۲	۱/۶۵۸۴
(۳۰), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۲۵۱۲۶(۰)	۰/۱۰۶۶۷(-۲)	۰/۲۲۹۷۸(-۱۳)	۴/۷۹۱۵	۱/۶۸۵۹
(۳۱), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۲۵۱۲۶(۰)	۰/۴۷۸۳۷(-۳)	۰/۲۲۳۱۳(-۱۶)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
(۵۴), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۱۹۹۷۰(۰)	۰/۴۱۹۱۳(-۴)	۰/۴۴۹۶۹(-۲۶)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

جدول ۴. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_r(x) = ۱ + \frac{۱}{x^4} - \frac{۱}{x^r} - x^r$					
روش‌های بررسی شده	$ x_1 - \alpha $	$ x_r - \alpha $	$ x_{r'} - \alpha $	$r_c$	IE
Newton [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۶۶۱۱۶(-۱)	۰/۷۵۹۰۸(-۲)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۱	۱
Abbasbandy [۲۴]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۶۶۱۱۷(-۱)	۰/۸۴۲۸۲(-۳)	۳	۱/۴۴۲۳
Liu et al [۷]	۰/۸۷۵۳۹(-۱)	۰/۱۲۶۷۶(-۲)	۰/۱۱۲۸۲(-۹)	۴	۱/۵۸۷۴
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_r = ۰/۱$ [۲۵]	۰/۶۰۸۰۱(-۱)	۰/۲۶۰۹۴(-۲)	۰/۱۲۷۷۱(-۵)	۲/۴۰۴۸	۱/۵۵۰۷
(۲۸), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۳۳۸۹۶(-۲)	۰/۲۶۶۰۱(-۹)	۰/۱۱۱۲۳(-۳۹)	۴/۲۳۶۲	۱/۶۱۸۱
(۲۹), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۳۳۸۹۶(-۲)	۰/۱۰۶۶۷(-۱۰)	۰/۲۲۹۷۴(-۲۶)	۴/۵۶۱۸	۱/۶۵۸۱
(۳۰), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۳۳۸۹۶(-۲)	۰/۲۷۸۸۹(-۱۰)	۰/۳۱۱۷۲(-۲۹)	۴/۷۹۱۵	۱/۶۸۵۹
(۳۱), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۳۳۸۹۶(-۲)	۰/۷۸۶۲۹(-۱۱)	۰/۲۰۱۸۳(-۵۴)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
(۵۴), روش $\gamma_r = ۰/۱$	۰/۳۴۷۸۰(-۲)	۰/۱۳۱۹۶(-۱۲)	۰/۸۲۶۱۵(-۷۶)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

**جدول ۵.** مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_r(x) = (x - 2)(x^r + x + 2)e^{-5x}$					
روش‌های بررسی شده	$ x_i - \alpha $	$ x_j - \alpha $	$ x_k - \alpha $	$r_c$	IE
Newton [۱]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۰۳۳۰(-۱)	۰/۱۲۷۷۶(-۴)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۱۷۴۱(-۱)	۰/۱۷۵۵۸(-۴)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۹۴۳۲۷(-۲)	۰/۱۰۰۱۷(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebychev	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۱۴۰۸۱(-۱)	۰/۳۳۳۵۰(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۱۷۳۹۱(۰)	۰/۱۲۲۳۱(-۲)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_i = 2/2$ , $x_1 = 1/\lambda$	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۲۹۹۶(-۳)	۰/۱۱۳۳۲(-۴)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_i = 0/1$ [۲۵]	۰/۲۰۴۶۸(-۱)	۰/۹۷۵۳۱(-۷)	۰/۲۲۴۸۲(-۱۹)	۲/۴۸۲۵	۱/۵۷۵۶
Liu et al [۷]	۰/۱۲۵۷۷(-۲)	۰/۵۰۷۷۶(-۱۳)	۰/۱۶۱۱۵(-۵۴)	۴	۱/۵۸۷۴
(۲۸)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۸۶۹۶۸(-۱۶)	۰/۳۶۸۱۲(-۷۴)	۴/۲۳۶۶	۱/۶۱۸۱
(۲۹)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۴۷۲۸۳(-۲۱)	۰/۲۰۱۹۷(-۱۰۳)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
(۳۰)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۶۱۷۸۸(-۱۸)	۰/۱۲۱۵۹(-۹۰)	۴/۷۹۰۵	۱/۶۸۵۸
(۳۱)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۲۴۹۸۱(-۲۰)	۰/۴۱۳۳۰(-۱۰۸)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
(۵۴)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۸۱۱۶۳(-۳)	۰/۱۷۳۷۴(-۲۲)	۰/۵۱۳۲۲(-۱۳۹)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

**جدول ۶.** مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_r(x) = e^{x^r - x} - \cos(x^r - 1) + x^r + 1$					
روش‌های بررسی شده	$ x_i - \alpha $	$ x_j - \alpha $	$ x_k - \alpha $	$r_c$	IE
Newton [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۲۲۲۸۳(-۱)	۰/۲۴۵۱۳(-۳)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۲۸۹۲۷(۰)	۰/۱۷۶۹۸(۰)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۶۷۷۳۷(-۲)	۰/۳۳۵۹۵(-۶)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebychev	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۹۰۷۱۱(-۲)	۰/۹۰۶۲۱(-۶)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۸۹۰(-۱)	۰/۱۹۰۱۵(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_i = -1/4$ , $x_1 = -1/\lambda$	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۵۰۹۱(-۱)	۰/۴۴۸۱۹(-۳)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_i = 0/1$ [۲۵]	۰/۲۴۵۹۲(-۱)	۰/۹۲۱۵۹(-۵)	۰/۳۵۶۹۵(-۱۲)	۲/۴۸۲۵	۱/۵۷۵۶
Liu et al [۷]	۰/۸۹۴۸۵(-۱)	۰/۵۳۰۰۵(-۲)	۰/۱۱۲۱۸(-۷)	۴	۱/۵۸۷۴
(۲۸)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۲۱۲۵۱(-۱۳)	۰/۹۲۲۸۷(-۵۹)	۴/۲۳۵۸	۱/۶۱۸۰
(۲۹)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۶۲۱۱۶(-۱۴)	۰/۵۰۵۱۹(-۶۶)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
(۳۰)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۵۰۱۹۳(-۱۴)	۰/۷۰۶۲۹(-۶۹)	۴/۷۹۰۵	۱/۶۸۵۸
(۳۱)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۳۴۰۴۹(-۱۴)	۰/۱۱۹۲۷(-۷۳)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
(۵۴)، روش $\gamma_i = 0/1$	۰/۴۲۲۱۷(-۲)	۰/۱۰۵۴۸(-۱۳)	۰/۷۷۵۳۴(-۸۵)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

**جدول ۷.** مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_{\Delta}(x) = \log(1+x^r) + e^{-rx+x^r} \sin x$					
روش‌های بررسی شده	$ x_i - \alpha $	$ x_r - \alpha $	$ x_\gamma - \alpha $	$r_c$	IE
Newton [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۷۷۸۶۲(-۱)	۰/۹۰۲۹۷(-۲)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۹۷۱(۰)	۰/۲۸۵۳۳(-۱)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۳۸۸۳۴(-۱)	۰/۶۹۴۴۰(-۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebychev	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۱۹۳۰۵(-۱)	۰/۲۳۴۸۸(-۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۳۸۷۳۵(-۱)	۰/۶۶۵۹۲(-۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_i = ۰/۶, x_1 = ۱$	۰/۱۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۷۴۳(۰)	۰/۳۴۴۱۰(-۲)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_i = ۰/۱$ [۲۵]	۰/۸۰۲۳۲(-۱)	۰/۲۶۵۲۱(-۲)	۰/۲۰۸۷۴(-۵)	۲/۴۶۸۲	۱/۵۷۱۱
Liu et al [۷]	۰/۳۶۲۲۴(-۱)	۰/۲۲۸۶۰(-۴)	۰/۱۴۵۷۸(-۱۷)	۴	۱/۵۸۷۴
(۲۸)، $\gamma_i = ۰/۱$ , روش	۰/۳۴۴۰۶(-۱)	۰/۵۵۶۴۶(-۵)	۰/۵۲۵۵۰(-۲۱)	۴/۲۳۶۰	۱/۶۱۸۰
(۲۹)، $\gamma_i = ۰/۱$ , روش	۰/۳۴۴۰۶(-۱)	۰/۱۸۹۲۳(-۵)	۰/۷۶۰۷۵(-۱۵)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
(۳۰)، $\gamma_i = ۰/۱$ , روش	۰/۳۴۴۰۶(-۱)	۰/۱۳۰۶۰(-۵)	۰/۱۰۹۳۵(-۲۶)	۴/۷۸۸۷	۱/۶۸۵۵
(۳۱)، $\gamma_i = ۰/۱$ , روش	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۴۸۸۰۹(-۶)	۰/۴۲۶۶۳(-۳۰)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
(۵۴)، $\gamma_i = ۰/۱$ , روش	۰/۴۱۰۸۹(-۱)	۰/۲۱۰۰۱(-۶)	۰/۳۵۳۸۹(-۳۸)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

**جدول ۸.** مقایسه شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

روش‌های تکراری بدون حافظه			روش‌های تکراری با حافظه		
شاخص کارایی	مرتبه همگرایی	نام روش	شاخص کارایی	مرتبه همگرایی	نام روش
۱/۴۱۴۲	۲	روش نیوتون [۱]	۱/۶۴۴۸	۴/۴۴۹۵	روش پنکوویچ و همکاران [۲۰]
۱/۴۱۴۲	۲	روش استینفسن [۲]	۱/۸۴۸۵	۶/۳۱۶	روش لاله چینی و همکاران [۱۶]
۱/۴۴۲۳	۳	روش عباسنی [۲۴]	۱/۷۳۲۱	۳	روش دزونیک-پنکوویچ [۱۶]
۱/۵۸۷۴	۴	روش استروفسکی [۳]	۱/۶۱۸۰	۴/۲۳۶۱	روش ونگ [۲۱]
۱/۵۸۷۴	۴	روش جارات [۴]	۱/۶۴۴۸	۴/۴۴۹۵	روش ونگ [۲۱]
۱/۵۸۷۴	۴	روش لیو و همکاران [۷]	۱/۵۷۰۳	۴/۴۶۶۱	روش تراب [۲۵]
۱/۵۸۷۴	۴	روش کانگ-تراب [۸]	۱/۶۱۸۱	۴/۲۳۶۲	(روش) (۲۸)
۱/۵۸۷۴	۴	روش کینگ [۵]	۱/۶۵۸۱	۴/۵۶۱۸	(روش) (۲۹)
۱/۵۸۷۴	۴	روش چان [۶]	۱/۶۸۵۹	۴/۷۹۱۵	(روش) (۳۰)
۱/۵۸۷۴	۴	روش سلیمانی و همکاران [۱۴]	۱/۷۳۶۵	۵/۲۳۶۱	(روش) (۳۱)
۱/۵۸۷۴	۴	روش کوردره و همکاران [۱۳]	۱/۸۵۴۰	۶/۳۷۲۳	(روش) (۵۴)

## ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، چندین معادله غیرخطی با ریشه‌های ساده را با استفاده از روش‌های تکراری با حافظه حل کردند. این معادلات در اکثر مسایل مربوط به علوم مهندسی دیده می‌شوند و در این رشته‌ها کاربرد فراوانی دارند. همان‌طور که از جدول ۱ مشاهده می‌شود بهبود مرتبه همگرایی روش‌های جدید از دیگر روش‌های ذکر شده در

این مقاله بالاتر است. بهبود مرتبه همگرایی یک روش دوگامی بهین از ۴ به ۵/۲۳۶۱، ۴/۷۹۱۲، ۴/۵۶۱۶ و ۶/۳۷۲۳ را همان‌طور که در بخش چهارم مشاهده شد، در بخش پنجم نیز با استفاده از مثال‌های عددی، به صورت عملی اثبات شد. مثال‌های عددی جدول‌های ۳ تا ۷ با نتایج موجود در بخش‌های ۳ و ۴ این مقاله هماهنگی کامل دارد. جدول ۸ نشان می‌دهد شاخص کارایی روش با حافظه جدید از دیگر روش‌های موجود بالاتر می‌باشد.

در تحقیقات آتی نیز می‌توان موارد زیر را در نظر گرفت:

- (۱) بحث روی ریشه‌های غیرساده معادلات غیرخطی.
- (۲) بحث روی ناحیه جذب ریشه‌های معادلات غیرخطی و نقشه‌های دینامیکی آنها.
- (۳) حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی با استفاده از روش‌های تکراری.
- (۴) بحث در همگرایی موضعی و نیمه موضعی این روش‌ها.

## منابع

- [1] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., (1970). Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, New York.
- [2] J.F. Steffensen, (1933). Remarks on iteration, Scandinavian Aktuarietidskr, 16, 64-72.
- [3] Ostrowski, A.M., (1960). Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, New York.
- [4] Jarratt, P., (1966). Some fourth order multipoint methods for solving equations. Mathematics of Computation, 20, 434-437.
- [5] King, R.F., (1973). A family of fourth-order methods for nonlinear equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 10, 876-879.
- [6] Chun, C., (2008). Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 195, 454-459.
- [7] Z., Liu, Q., Zheng, P., Zhao, (2010), A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications, Applied Mathematics and Computation, 216, 1978-1983.
- [8] Kung, H.T., Traub, J.F., (1974). Optimal order of one-point and multipoint iteration. Journal of the ACM (JACM), 21, 643-651.
- [9] Chun, C., (2005). Iterative methods improving Newton's method by the decomposition method, Computers and Mathematics with Applications, 50, 1559-1568.
- [10]. Chun, C., M.Y. Lee, Neta, B., Dzunic, J., (2012), On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics, Applied Mathematics and Computation, 218, 6427-6438.
- [11] Kansal, M., Kanwar, V., Bhatia, S., (2015). New modifications of Hansen–Patrick's family with optimal fourth and eighth orders of convergence, Applied Mathematics and Computation, 269, 507-519.
- [12] Cordero Barbero, A., Hueso Pagoaga, J.L., Martínez Molada, E., Torregrosa Sanchez, J.R., (2013). A new technique to obtain derivative-free optimal iterative methods for solving nonlinear equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 252, 95-102.
- [13] Cordero Barbero, A., Maimo, J., Torregrosa Sanchez, JR., Vassileva, M., (2015). Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families. Journal of Mathematical Chemistry, 53(1), 430-449.
- [14] Soleymani, F., Sharma, R., Li, X., Tohidi, E., (2012). An optimized derivative-free form of the Potra–Ptak method, Mathematical and Computer Modelling, 56, 97-104.
- [15] Neta, B., (1983). A new family of higher order methods for solving equations, International Journal of Computer Mathematics, 14(2), 191-195.
- [16] Lalehchini, M. J., Lotfi, T., Mahdiani, K., (2020), On Developing an Adaptive Free-Derivative Kung and Traub's Method with Memory, Journal of Mathematical Extension, 14(3), 221-241.

- [17] Torkashvand, V., (2019). Structure of an Adaptive with Memory Method with Efficiency Index 2, International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 9(4), 239-252.
- [18] Torkashvand, V., Kazemi, M., (2020). On an Efficient Family with Memory with High Order of Convergence for Solving Nonlinear Equations, International Journal Industrial Mathematics ,12(2), 209-224.
- [19] Petkovic, M.S., Neta, B., Petkovic, L.D., Dzunic, J., (2014). Multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey. Applied Mathematics and Computation, 226, 635-660.
- [20] Petkovic, M.S., Ilic S., Dzunic J., (2010). Derivative free two-point methods with and without memory for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation, 217 (5),1887-1895.
- [21] Wang, X., (2018). A new accelerating technique applied to a variant of Cordero-Torregrosa method, Journal of Computational and Applied Mathematics, 330, 695-709.
- [22] Soleymani, F., Lotfi, T., Tavakoli E., Haghani F.K., (2015). Several iterative methods with memory using accelerators, Applied Mathematics Computation, 254, 452-458.
- [23] Cordero, A., Lotfi, T., Torregrosa, J.R., Assari, P., Mahdiani, K., (2016). Some new bi-accelerator two-point methods for solving nonlinear equations, Computation. Applied. Mathematics. 35, 251-267.
- [24] Abbasbandy, S., (2006). Modified homotopy perturbation method for nonlinear equations and comparison with Adomian decomposition method. Applied Mathematics and Computation, 172 (1), 431-438.
- [25] Traub, J.F., (1964). Iterative Methods for the Solution of Equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [26] Dzunic, J., Petkovic, M. S., (2012). A cubically convergent Steffensen-like method for solving nonlinear equations, Applied Mathematics Letters, 25, 1881-1886.
- [27] Sharifi, S., Siegmund, S., Salimi, M., (2016). Solving nonlinear equations by a derivative-free form of the King's family with memory, Calcolo, 53 (2), 201-215.
- [28] Torkashvand. V, Lotfi, T., Fariborzi Araghi, M.A., (2019). A new family of adaptive methods with memory for solving nonlinear equations, Mathematical Sciences, 13,1-20.
- [29] Ahdi Aghdam, R., Rezapour, R., (1389). Development of Newton iterative methods and introduction of fast methods for solving nonlinear equations. Journal of Operations Research in Its Applications, 7 (3), 11-19.
- [30] Ahdi Aghdam, R., Qousi, S., (1388). Newton-like iterative methods for nonlinear equation systems. Journal of Operations Research in Its Applications, 6 (23), 1-10.
- [31] Ullah, M. Z., Torkashvand, V., Shateyi, Stanford., Asma, M., (2022). Using matrix eigenvalues to construct an iterative method with the highest possible efficiency index two, Mathematics, 10(1370), 1-15.
- [32] Torkashvand, V., (2022). A two-step method adaptive with memory with eighth-order for solving nonlinear equations and its dynamic, Computational Methods for Differential Equations, 50(1), 2022, 1007-1026.
- [33] Moccari, M., Lotfi, T., Torkashvand, V., (2022). On Stability of a Two-Step Method for a Fourth-degree Family by Computer Designs along with Applications, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications (IJNAA), 2022, inpress, 1-15.