مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیستم، شماره اول (پیاپی ۷۶)،بهار۰۲، ص ص ۹۵-۷۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

محاسبه میزان تراکم در خروجی نامطلوب با استفاده از داده‌های فازی

سودابه نظری [۱]، محسن رستمی مال خلیفه [۲*]، علی حمزه ای [۳]
۱- دانشجوی دکتری، گروه علوم پایه، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران
۲- دانشیار، گروه علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات تهران، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
۳- استادیار، گروه علوم پایه، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران

رسید مقاله: ۱۷ فروردین ۱۴۰۰
پذیرش مقاله: ۳۱ شهریور ۱۴۰۰

چکیده
می‌دانیم تراکم یکی از مفاهیم حیاتی در تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که در تصمیم‌گیری های مدیریتی نقش مهمی ایفا می‌کند، به همین دلیل محققین بسیاری در این زمینه مطالعه کرده‌اند. محاسبه و تشخیص تراکم از دو جنبه مهم است. با کاهش ورودی در واحد تصمیم‌گیرنده‌ای که دچار تراکم شده است، باعث کاهش هزینه‌های آن می‌شویم. از طرفی تراکم باعث کاهش خروجی می‌گردد پس با رفع آن، اجبارا خروجی افزایش پیدا می‌کند و این امر باعث سود بیشتر می‌شود. ولی روش‌های ارایه‌شده برای محاسبه تراکم درDEA، مبحث تراکم را فقط با درنظرگرفتن خروجی‌های مطلوب مورد بررسی قرار داده‌اند. همان‌طور که می‌دانیم اندازه‌گیری دقیق داده‌ها در دنیای واقعی عملا امکان‌پذیر نمی‌باشد. همچنین در بعضی موارد ممکن است داده‌ها دارای ابهام باشند. بنابراین فرض دقیق بودن داده‌ها در حل مسایل، فرض درستی نمی‌باشد. یکی از راه‌های مواجهه با داده‌های نادقیق، داده‌های فازی می‌باشد.

هدف از این مقاله به‌دست آوردن نوع جدیدی از تراکم در خروجی‌های نامطلوب با استفاده از داده‌های فازی می‌باشد. مدلی ارایه می‌دهیم که بتواند این نوع تراکم را تشخیص داده و میزان آن را محاسبه کند.

کلمات کلیدی: تراکم، تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌های فازی، خروجی نامطلوب.

۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، یک ابزار قدرتمند مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی شامل تکنیک‌ها و روش‌هایی برای سنجش عملکرد یا ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس است.

تاکنون روش‌های مختلفی در DEA برای بررسی پدیده تراکم ارایه شده است. اولین بار مفهوم اقتصادی تراکم توسط فار و گروسکوف [۱] در مقالات DEA ارایه شد و متعاقبا توسط فار، گروسکوف و لاول [۲] شکل اجرای عملی پیدا کرد. کوپر، تامسون و ترال [۳] یک روش مبتنی بر متغیرهای کمکی (مدل CTT) ارایه دادند

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Mohsen_rostamy@yahoo.com

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

که نه تنها به طور موفقیت‌آمیزی منابع تراکم را تشخیص می‌دهد، بلکه قادر است مقدار تراکم در هر شاخص ورودی را به صورت تفاوت میان مقدار مشاهده‌شده و مقدار مورد انتظار به‌دست آورد. مدل CTT توسط براکت و همکاران [۴] در مطالعه‌ای که آنها بر روی صنعت چین انجام دادند گسترش پیدا کرد. کوپر و همکاران [۵] یک مدل جمعی یکپارچه را برای مطالعه تراکم گسترش دادند. سپس کوپر و همکاران [۶] یک روش تک مدله را ارایه دادند که به جای روش دو مدله قبلی به کار گرفته شد. جهانشاهلو و خدابخشی [۷] روشی را بر مبنای ترکیبات آزاد ورودی‌ها ارایه دادند. همچنین خدابخشی [۸] روشی را برای تعیین تراکم در مدل DEA تصادفی ارایه دادند. وی و یان [۹] مدل‌های جمعی خروجی DEA را به کار گرفته و یک شرط لازم و کافی برای وجود تراکم ارایه دادند. تن و ساهو [۱۰] یک روش مبتنی بر کمکی را برای محاسبه مقیاس کشسانی در حضور تراکم در یک قالب یکپارچه ارایه دادند. آنها مفهوم تراکم ضعیف و قوی را برای اولین بار معرفی کردند. آنها ثابت کردند که وقوع تراکم قوی منوط به بهره‌وری حاشیه‌ای منفی است. سیوشی و سکیتانی [۱۱] یک روش اصلاح‌شده را ارایه دادند که قادر است تراکم را در صورت وجود جواب‌های چندگانه تشخیص دهد. همچنین تحقیقاتی در زمینه واحدهای تصمیم‌گیری که دارای فرایند دو و یا چندمرحله‌ای شبکه‌ای هستند صورت گرفته است که در آنها علاوه بر ورودی‌ها و خروجی‌ها، مجموعه‌ای از اندازه واسطه وجود دارد که این اندازه واسطه خروجی مرحله اول است که به عنوان ورودی مرحله بعد در نظر گرفته می‌شود. در این زمینه وانگ در سال ۱۹۹۷، فرایند دو مرحله‌ای را بیان و در صنعت بانکداری پیاده کرد. این مدل‌ها توسط ژو و سیفورد [۱۲] در سال‌های ۲۰۰۳، ۲۰۰۴ نیز در زمینه‌های دیگر پیاده‌سازی شد. همچنین می‌توان به مراجع [۱۳–۱۸] برای مطالعه بیشتر اشاره کرد.

نظری و همکاران [۱۹] تراکم را با خروجی نامطلوب بررسی کردند و روشی جدید برای محاسبه تراکم با حضور خروجی نامطلوب ارایه داده‌اند. این بحث دارای اهمیت ویژه‌ای است؛ زیرا کاهش خروجی نامطلوب می‌تواند باعث افزایش خروجی‌های مطلوب گردد.

هدف از این مقاله محاسبه تراکم خروجی‌های نامطلوب با استفاده از داده‌های فازی می‌باشد.

این مقاله از شش بخش تشکیل شده است. در بخش دوم آن مفاهیم مقدماتی توضیح داده شده است. بخش سوم روش نظری و همکاران ارایه‌شده است. در بخش چهارم روش پیشنهادی برای محاسبه تراکم در حضور خروجی نامطلوب با داده‌های فازی ارایه‌شده است. در بخش پنجم مثالی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت و در بخش پایانی نتیجه‌گیری ارایه شده است.

۲ تراکم

یکی از مفاهیم مهم تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) تراکم می‌باشد. مفهوم تراکم کاربرد گسترده‌ای در زمینه علوم مختلف مانند علوم پزشکی، مهندسی ترافیک، حمل و نقل و جمعیت دارد. همچنین کاربرد زیادی در زندگی روزمره دارد. در محاوره‌ی روزمره، تراکم یعنی انبوه شدن، متمرکز شدن تعدادی از متغیرها در فضای کوچکی. تراکم به وضعیتی در اصطلاح اقتصادی گفته می‌شود که سرمایه‌گذاری بیش از اندازه در سیستم

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

ورودی‌ها صورت گیرد. تراکم وقتی رخ می‌دهد که افزایش در یک یا چند ورودی منجر به کاهش در برخی خروجی‌ها شود (بدون بهبود بخشیدن دیگر ورودی‌ها یا خروجی‌ها)؛ یا برعکس وقتی کاهش در برخی ورودی‌ها منجر به افزایش در برخی خروجی‌ها شود (بدون بدتر کردن هیچ ورودی یا خروجی دیگری).

تشخیص وجود تراکم و حذف آن دارای دو حسن است:

۱- اگر حذف شود چون از جنس ورودی است (تراکم در ورودی داریم) و ورودی از جنس هزینه است، هزینه کم می‌شود.

۲- طبق تعریف تراکم باعث کاهش خروجی شده است، پس با حذف تراکم، اجبارا خروجی افزایش می‌یابد.

پس منفعت‌های اقتصادی تراکم زیاد است.

- **خروجی نامطلوب**

اگرچه در حضور خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تعریف تراکم متفاوت خواهد بود؛ زیرا با افزایش خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوب کاهش می‌یابد. در موسسات تولیدی و خدماتی، عموماً ضایعات نیز وجود داشته که باعث تحمیل هزینه اضافه بر موسسات می‌گردد. لذا ضایعات را می‌توان به عنوان خروجی‌ها نامطلوب در نظر گرفت. خروجی‌های نامطلوب به طور مشترک با خروجی‌های مطلوب تولید می‌شوند. در جهان واقعی خروجی‌های نامطلوب مانند آلودگی دود، هدر رفتن و... به طور اجتناب‌ناپذیری همراه با خروجی‌های مطلوب تولید می‌شوند.

- **مجموعه فازی**

اگر برد $\{\circ,\text{۱}\}$ را به بازه بسته $[\circ,\text{۱}]$ تبدیل کنیم، مجموعه کلاسیک به مجموعه فازی تبدیل می‌شود. به عبارتی مفروض بر مجموعه جهانی U، مجموعه فازی A در Uبه شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A:U\to[\circ,\text{۱}]$$

$$A(U)\in[\circ,\text{۱}]$$

$A(U)$ تابع عضویت نامیده می‌شود و میزان درجه عضویت A به U را بیان می‌کند $[\circ,\text{۱}]$.

- **برش α**

برش α مجموعه فازی A که با A_α نمایش می‌دهیم، یک مجموعه غیرفازی است و برای هر α در بازه بسته $[\circ,\text{۱}]$ برابر است با:

$$A_\alpha=\{x\in U\,|\,A(x)\ge\alpha\}$$

- **عدد فازی مثلثی**

عدد فازی مثلثی (l,m,u) یک فاصله فازی است که تابع عضویت آن $A(x)$:

۱- یک نگاشت پیوسته از R به فاصله بسته $[\circ,W]$، $\circ\le W\le\text{۱}$.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

۲- در فاصله $[-\infty, l]$ ثابت و برابر با صفر است.

۳- در فاصله $[l, m]$ اکیدا صعودی

۴- در فاصله $[m, u]$ اکیدا نزولی

۵- در فاصله $[u, +\infty]$ ثابت و برابر با صفر است.

mارزش مرکزی و lو u حدود پایین و بالا هستند.

۳ مدل نظری و همکاران [۱۹]

ارزیابی عملکرد و تشخیص نقاط ضعف و قوت هر موسسه از ملزومات مدیریت است. یکی از ابزارهای مناسب و کارآمد در این زمینه تحلیل پوششی داده‌هاست که به عنوان یک روش غیرپارامتری به منظور محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده می‌شود. استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر تعیین میزان کارایی نسبی، نقاط ضعف سازمان را در شاخص‌های مختلف تعیین کرده و با ارایه میزان مطلوب آنها، خط‌مشی سازمان را به سوی ارتقای کارایی و بهره‌وری مشخص می‌کند.

هدف از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، شناسایی و بهبود واحدهای ناکاراست. یکی از حالت‌هایی که واحد تحت ارزیابی ناکاراست، زمانی است که تراکم رخ می‌دهد. این پدیده یکی از مفاهیم اساسی در اقتصاد است که بی‌توجهی به آن، به بدنه اقتصادی موسسه ضرر وارد می‌کند. تحلیل پوششی داده‌ها ابزاری برای بررسی و شناسایی این پدیده است. در مدل‌های معمول، تراکم فقط در ورودی‌ها سنجیده می‌شود. در این مقاله، مدلی جدید برای اندازه‌گیری تراکم در ورودی‌ها و خروجی نامطلوب ارایه گردیده است. شناسایی و ارزیابی تراکم کاربردهای مهمی در مراکز آموزشی و واحدهای صنعتی و تولیدی دارد. کاربردهای بیشمار تراکم موجب‌شده که محققان به بررسی تراکم و ارایه مدل‌هایی برای ارزیابی آن بپردازند. این بحث دارای اهمیت ویژه‌ای است؛ زیرا افزایش خروجی نامطلوب می‌تواند باعث کاهش خروجی‌های مطلوب گردد.

مدل (۱) تراکم را روی ورودی و هم روی خروجی نامطلوب مشخص می‌کند:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \varphi_{\circ} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} -s_i^{-c} + \sum_{r=1}^{s} s_r^{+} - \sum_{i=1}^{m} s_{i2}^{+} + \sum_{t=1}^{k} -s_t^{-bc} - \sum_{t=1}^{k} s_{tb}^{+}\right) \\
& s.t. \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^{-c} - s_{i2}^{+} = X_{i\circ} \;, && i = 1,\dots,n \;, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - \varphi_{\circ} y_{r\circ} - s_r^{+} = 0 \;, && r = 1,\dots,s \;, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{tj} + s_t^{-bc} - s_{tb}^{+} = b_{to} \;, && t = 1,\dots,p \;, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \;, && (1) \\
& s_i^{-c}, s_{i2}^{+}, \lambda_j, s_r^{+}, s_{tb}^{+}, s_t^{-bc} \geq 0 \;.
\end{aligned}
$$

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

در این مدل s_i^{-c} تراکم در ورودی iام می‌باشد و s_t^{-bc} میزان تراکم در خروجی نامطلوب می‌باشد.

٤ مدل پیشنهادی

دردنیای واقعی تصمیم‌گیری‌ها بر پایه داده‌های کمی و نیز کیفی انجام می‌گیرد؛ بنابراین به نظر می‌رسد که نظریه فازی برای چنین مسایلی مناسب است. بسط تئوری مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها برای حالتی که برخی یا تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها نادقیق باشند، ضروری به نظر می‌رسد. ورودی‌ها و خروجی‌ها و متغیرهای کمکی را به صورت اعداد فازی مثلثی در نظر گرفته‌ایم. حال مدل (۱) را طوری گسترش می‌دهیم که بتواند میزان تراکم را با داده‌های فازی نیز محاسبه کند.

لذا مدل و روش پیشنهادی جهت محاسبه تراکم در این شرایط به صورت مدل (۲) است:

$$Max \qquad \varphi_\circ + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} -(s_i^{-c^l}, s_i^{-c^m}, s_i^{-c^u}) + \sum_{r=1}^{s}(s_r^{+l}, s_r^{+m}, s_r^{+u}) - \sum_{i=1}^{m}(s_{i2}^{+l}, s_{i2}^{+m}, s_{i2}^{+u})\right)$$

$$+\varepsilon\left(\sum_{t=1}^{k} -(s_t^{-bc^l}, s_t^{-bc^m}, s_t^{-bc^u}) - \sum_{t=1}^{k}(s_{tb}^{+l}, s_{tb}^{+m}, s_{tb}^{+u})\right)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u) + (s_i^{-c^l}, s_i^{-c^m}, s_i^{-c^u}) - (s_{i2}^{+l}, s_{i2}^{+m}, s_{i2}^{+u}) = (x_{i\circ}^l, x_{i\circ}^m, x_{i\circ}^u) \quad , \qquad i = 1,\dots,m \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u) - \varphi_\circ(y_{r\circ}^l, y_{r\circ}^m, y_{r\circ}^u) - (s_r^{+l}, s_r^{+m}, s_r^{+u}) = \circ \quad , \qquad r = 1,\dots,s \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(b_{tj}^l, b_{tj}^m, b_{tj}^u) + (s_t^{-bc^l}, s_t^{-bc^m}, s_t^{-bc^u}) - (s_{tb}^{+l}, s_{tb}^{+m}, s_{tb}^{+u}) = (b_{to}^l, b_{to}^m, b_{to}^u) \quad , \quad t = 1,\dots,k \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \quad , \tag{۲}$$

$$(s_i^{-c^l}, s_i^{-c^m}, s_i^{-c^u}), (s_{i2}^{+l}, s_{i2}^{+m}, s_{i2}^{+u}), (s_r^{+l}, s_r^{+m}, s_r^{+u}), (s_t^{-bc^l}, s_t^{-bc^m}, s_t^{-bc^u}), (s_{tb}^{+l}, s_{tb}^{+m}, s_{tb}^{+u}), \lambda_j \geq \circ \quad ,$$

$$i = 1,\dots,m; r = 1,\dots,s; j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,k.$$

با محاسبه برش‌های α تابع هدف و محدودیت‌ها، مدل برنامه‌ریزی خطی (۳) را خواهیم داشت:

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

$$Max \quad \varphi_{\circ}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}-\left(\alpha s_i^{-c^m}+(1-\alpha)s_i^{-c^l},\alpha s_i^{-c^m}+(1-\alpha)s_i^{-c^u}\right)+\sum_{r=1}^{s}\left(\alpha s_r^{+m}+(1-\alpha)s_r^{+l},\alpha s_r^{+m}+(1-\alpha)s_r^{+u}\right)\right)$$

$$-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha s_{i2}^{+m}+(1-\alpha)s_{i2}^{+l},\alpha s_{i2}^{+m},(1-\alpha)s_{i2}^{+u}\right)+\sum_{t=1}^{k}-\left(\alpha s_t^{-bc^m}+(1-\alpha)s_t^{-bc^l},\alpha s_t^{-bc^m}+(1-\alpha)s_t^{-bc^u}\right)\right)$$

$$-\varepsilon\left(\sum_{t=1}^{k}\left(\alpha s_{tb}^{+m}+(1-\alpha)s_{tb}^{+l},\alpha s_{tb}^{+m},(1-\alpha)s_{tb}^{+u}\right)\right)$$

$s.t.$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^l,\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^u\right)\lambda_j+\left(\alpha s_i^{-c^m}+(1-\alpha)s_i^{-c^l},\alpha s_i^{-c^m}+(1-\alpha)s_i^{-c^u}\right)$$

$$-\left(\alpha s_{i2}^{+m}+(1-\alpha)s_{i2}^{+l},\alpha s_{i2}^{+m}+(1-\alpha)s_{i2}^{+u}\right)=\left(\alpha x_{i\circ}^m+(1-\alpha)x_{i\circ}^l,\alpha x_{i\circ}^m+(1-\alpha)x_{i\circ}^u\right) \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha y_{rj}^m+(1-\alpha)y_{rj}^l,\alpha y_{rj}^m+(1-\alpha)y_{rj}^u\right)\lambda_j-\varphi_{\circ}\left(\alpha y_{r\circ}^m+(1-\alpha)y_{r\circ}^l,\alpha y_{r\circ}^m+(1-\alpha)y_{r\circ}^u\right)-$$

$$\left(\alpha s_r^{+m}+(1-\alpha)s_r^{+l},\alpha s_r^{+m}+(1-\alpha)s_r^{+u}\right)=\circ \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(\alpha b_{tj}^m+(1-\alpha)b_{tj}^l,\alpha b_{tj}^m+(1-\alpha)b_{tj}^u\right)+\left(\alpha s_t^{-bc^m}+(1-\alpha)s_t^{-bc^l},\alpha s_t^{-bc^m}+(1-\alpha)s_t^{-bc^u}\right)=$$

$$\left(\alpha b_{to}^m+(1-\alpha)b_{to}^l,\alpha b_{to}^m+(1-\alpha)b_{to}^u\right) \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \quad , \qquad (3)$$

$$\left(s_i^{-c^l},s_i^{-c^m},s_i^{-c^u}\right)\left(s_i^{-c^l},s_i^{-c^m},s_i^{-c^u}\right),\left(s_{i2}^{+l},s_{i2}^{+m},s_{i2}^{+u}\right),\left(s_r^{+l},s_r^{+m},s_r^{+u}\right),(s_t^{-bc^l},s_t^{-bc^m},s_t^{-bc^u}),(s_{tb}^{+l},s_{tb}^{+m},s_{tb}^{+u}),\lambda_j\geq\circ.$$

حال تراکم در کران پایین را به‌دست می‌آوریم در واقع DMU_O در بهترین شرایط ولی بقیه DMUها در بدترین شرایط قرار دارند. بهترین شرایط یعنی اشاره به حالتی دارد که ورودی در کران پایین و خروجی مطلوب در کران بالا و خروجی نامطلوب در کران پایین می‌باشد.

$$Max \quad \varphi_{\circ}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}-\left(\alpha s_i^{-c^m}+(1-\alpha)s_i^{-c^l}\right)+\sum_{r=1}^{s}\left(\alpha s_r^{+m}+(1-\alpha)s_r^{+u}\right)\right)$$

$$+\varepsilon\left(-\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha s_{i2}^{+m}+(1-\alpha)s_{i2}^{+l}\right)+\sum_{t=1}^{k}-\left(\alpha s_t^{-bc^m}+(1-\alpha)s_t^{-bc^l}\right)-\sum_{t=1}^{k}\left(\alpha s_{tb}^{+m}+(1-\alpha)s_{tb}^{+u}\right)\right)$$

$s.t.$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^l\right)\lambda_j+\left(\alpha s_i^{-c^m}+(1-\alpha)s_i^{-c^l}\right)-\left(\alpha s_{i2}^{+m}+(1-\alpha)s_{i2}^{+l}\right)=\left(\alpha x_{i\circ}^m+(1-\alpha)x_{i\circ}^l\right) \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha y_{rj}^m+(1-\alpha)y_{rj}^l\right)\lambda_j-\varphi_{\circ}\left(\alpha y_{r\circ}^m+(1-\alpha)y_{r\circ}^u\right)-\left(\alpha s_r^{+m}+(1-\alpha)s_r^{+u}\right)=\circ \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(\alpha b_{tj}^m+(1-\alpha)b_{tj}^u\right)+\left(\alpha s_t^{-bc^m}+(1-\alpha)s_t^{-bc^u}\right)=\left(\alpha b_{to}^m+(1-\alpha)b_{to}^u\right) \quad ,$$

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \quad , \qquad (4)$$
$$\left(s_i^{-c^l}, s_i^{-c^m}, s_i^{-c^u}\right), \left(s_{i2}^{+l}, s_{i2}^{+m}, s_{i2}^{+u}\right), \left(s_r^{+l}, s_r^{+m}, s_r^{+u}\right), (s_t^{-bc^l}, s_t^{-bc^m}, s_t^{-bc^u}), (s_{tb}^{+l}, s_{tb}^{+m}, s_{tb}^{+u}), \lambda_j \geq 0.$$

حال تراکم در کران بالارا به‌دست می‌آوریم در واقع DMU_O در بدترین شرایط ولی بقیه DMUها در بهترین شرایط قرار دارند.

بدترین شرایط یعنی ورودی در کران بالا و خروجی مطلوب در کران پایین و خروجی نامطلوب در کران بالا قرار دارند.

$$Max \qquad \varphi_0 + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} -\left(\alpha s_i^{-c^m} + (1-\alpha)s_i^{-c^u}\right) + \sum_{r=1}^{s}\left(\alpha s_r^{+m} + (1-\alpha)s_r^{+l}\right)\right)$$
$$+\varepsilon\left(-\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha s_{i2}^{+m} + (1-\alpha)s_{i2}^{+u}\right) + \sum_{t=1}^{k} -\left(\alpha s_t^{-bc^m} + (1-\alpha)s_t^{-bc^u}\right) - \sum_{t=1}^{k}\left(\alpha s_{tb}^{+m} + (1-\alpha)s_{tb}^{+l}\right)\right)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha x_{ij}^m + (1-\alpha)x_{ij}^u\right)\lambda_j + \left(\alpha s_i^{-c^m} + (1-\alpha)s_i^{-c^u}\right) - \left(\alpha s_{i2}^{+m} + (1-\alpha)s_{i2}^{+u}\right) = \left(\alpha x_{i0}^m + (1-\alpha)x_{i0}^u\right) \quad ,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha y_{rj}^m + (1-\alpha)y_{rj}^u\right)\lambda_j - \varphi_0\left(\alpha y_{r0}^m + (1-\alpha)y_{r0}^l\right) - \left(\alpha s_r^{+m} + (1-\alpha)s_r^{+l}\right) = 0 \quad ,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(\alpha b_{tj}^m + (1-\alpha)b_{tj}^l\right) + \left(\alpha s_t^{-bc^m} + (1-\alpha)s_t^{-bc^l}\right) = \left(\alpha b_{to}^m + (1-\alpha)b_{to}^l\right) \quad ,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \quad , \qquad (5)$$
$$\left(s_i^{-c^l}, s_i^{-c^m}, s_i^{-c^u}\right), \left(s_{i2}^{+l}, s_{i2}^{+m}, s_{i2}^{+u}\right), \left(s_r^{+l}, s_r^{+m}, s_r^{+u}\right), (s_t^{-bc^l}, s_t^{-bc^m}, s_t^{-bc^u}), (s_{tb}^{+l}, s_{tb}^{+m}, s_{tb}^{+u}), \lambda_j \geq 0 \quad .$$

۵ مثال عددی

در این مثال، داده‌های حقیقی مربوط به ۲۵ شعبه‌ی یک بانک تجاری در ایران، به‌عنوان واحدهای تصمیم‌گیرنده، در نظر گرفته می‌شود [۲۰]. هر واحد تصمیم‌گیرنده دارای دو ورودی (تعداد کارکنان (x_1)و هزینه (x_2))، که هزینه‌ها شامل هزینه‌های کارکنان و هزینه‌های عملیاتی شعب بانک است، می‌باشد. همچنین، هر DMU دارای سه خروجی مطلوب (سپرده (y_1)، درآمد (y_2) و وام‌های اعطایی (y_3)) و یک خروجی نامطلوب (وام‌های غیرفعال (y_4)) می‌باشد. لازم به‌ذکر است که سپرده در هر شعبه نتیجه جذب بودجه مشتریان است. درآمد شامل درآمد بهره و درآمد غیربهره است. وام‌های اعطایی وام‌هایی است که توسط بخش‌های دولتی اعطا می‌شود. وام‌های غیرفعال، وام‌هایی هستند که طبق مقررات بانکی قراردادی هستند. فاکتورهای ورودی و خروجی توسط مشاوره با مدیریت شعبه کلیدی انتخاب شده‌اند.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

تمام معیارهای ورودی و خروجی به استثنای تعداد کارمندان به عنوان داده‌های فازی مثلثی در نظر گرفته می‌شوند. عدم قطعیت در داده‌های موجود شعب بانک رخ می‌دهد و مقدار آنها از طریق مشاوره با کارشناسان این مرکز مشخص شده است. داده‌ها در جداول ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند:

جدول ۱. ورودی ۲۵ شعبه بانک

بانک‌ها	کارکنان	هزینه‌ها
۱	۹	(۸۴۰۴,۳۶/۸۴۰۵,۸۴۰۶)
۲	۸	(۷۴۶۹,۸۲/۷۴۷۱,۷۴۷۳)
۳	۸	(۷۴۷۳,۰۵/۷۴۷۵,۷۴۷۷)
٤	۱۱	(۱۰۳۳۳,۳۸/۱۰۳۳۵,۱۰۳۳۶)
٥	۱۳	(۱۲۱۴۵,۹۶/۱۲۱۴۷,۱۲۱۴۸)
٦	۸	(۷۴۹۵,۵۶/۷۴۹۸,۷۴۹۹)
۷	۷	(۶۵۰۷,۳۸/۶۵۰۹,۶۵۱۱)
۸	۱۰	(۹۳۲۵,۱۸/۹۳۲۷,۹۳۲۹)
۹	۶	(۵۶۰۱,۰۰/۵۶۰۳,۵۶۰۵)
۱۰	۱۰	(۹۴۱۰,۴۹/۹۴۱۲,۹۴۱۴)
۱۱	۵	(۴۶۷۴,۷۸/۴۶۷۶,۴۶۷۸)
۱۲	۸	(۷۴۷۷,۴۹/۷۴۸۰,۷۴۸۲)
۱۳	۷	(۶۵۵۴,۹۸/۶۵۵۶,۶۵۵۸)
١٤	۷	(۶۵۸۶,۷۷/۶۵۸۸,۶۵۸۹)
١٥	۹	(۸۳.۸۰,۳۴/۸۳۸۰۱,۸۳۸۳)
١٦	۸	(۷۴۶۹,۶۹/۷۴۷۰,۷۴۷۲)
۱۷	۸	(۷۶۶۸,۱۶/۷۴۷۰,۷۴۷۲)
۱۸	۷	(۶۵۵۵,۷۸/۶۶۵۶,۶۵۵۸)
۱۹	۷	(۶۵۶۸,۳۵/۶۵۶۹,۶۵۷۰)
۲۰	۹	(۸۴۰۰,۹۸/۸۴۰۱,۸۴۰۳)
۲۱	۸	(۷۴۵۵,۸۷/۷۴۵۶,۷۴۵۷)
۲۲	۱۰	(۹۳۴۰,۱۱/۹۳۴۲,۹۳۴۴)
۲۳	۱۲	(۱۱۱۷۰,۵۳/۱۱۱۷۴,۱۱۱۷۶)
٢٤	۷	(۶۵۶۰,۴۱/۶۵۶۳,۶۵۶۴)
٢٥	۷	(۶۵۶۹,۹۳/۶۵۷۰,۶۵۷۱)

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

جدول ۲. خروجی ۲۵شعبه بانک

شعب بانک	سپرده‌ها	درآمد	وام‌های اعطا شده	وام‌های لغو شده
۱	(۲۰۵۰۷۰,۶۵/۲۰۵۰۷۳,۶۵۲۰۵۰۷۵)	(۱۱۹۹۰,۲۴/۱۱۹۹۰,۱۱۹۹۳)	(۱۵۱۰۸۸,۳۳/۱۵۱۰۹۰,۱۵۱۰۹۳)	(۵۹۸۸,۶۱/۵۹۸۹,۵۹۹۰)
۲	(۲۳۵۴۹۲,۹۰/۲۳۵۴۹۴,۲۳۵۴۹۶)	(۶۲۸۴,۲۱/۶۲۸۵,۶۲۸۷)	(۱۴۷۵۴۷,۸۴/۱۴۷۵۴۹,۱۴۷۵۵۰)	(۷۵۱۲,۲۲/۷۵۱۳,۷۵۱۵)
۳	(۲۳۷۰۱۳,۴۸/۲۳۷۰۱۵,۲۳۷۰۱۸)	(۱۲۱۵۸,۷۴/۱۲۱۵۸,۱۲۱۶۱)	(۱۶۳۰۲۴,۰۷/۱۶۳۰۲۵,۱۶۳۰۲۷)	(۴۶۹۶۰,۰۱/۴۶۹۶۲,۴۶۹۶۴)
٤	(۲۰۹۷۲۴,۵۴/۲۰۹۷۲۵,۲۰۹۷۲۷)	(۲۷۸۸,۳۵/۲۷۸۸,۲۷۸۹)	(۱۰۵۰۰۵,۴۷/۱۰۵۰۰۶,۱۰۵۰۰۹)	(۱۸۷۰۵,۲۵/۱۸۷۰۷,۱۸۷۰۸)
٥	(۳۸۵۴۱۷,۶۰/۳۸۵۴۱۸,۳۸۵۴۲۰)	(۱۶۶۶۷,۹۶/۱۶۶۶۸,۱۶۶۷۰)	(۹۸۹۵۹,۲۰/۹۸۹۶۱,۹۸۹۶۴)	(۸۴۷۶,۱۳/۸۴۷۰,۸۴۷۹)
٦	(۱۳۸۲۳۸,۶۱/۱۳۸۲۳۹,۱۳۸۲۴۰)	(۶۷۸۰,۹۳/۶۷۸۲.۶۷۷۳)	(۱۰۸۱۵۵,۱۱/۱۰۸۱۵۶,۱۰۸۱۵۸)	(۲۷۳۴,۵۳/۲۷۳۵,۲۷۳۷)
۷	(۱۸۳۸۳۵,۴۷/۱۸۳۸۳۷,۱۸۳۸۳۸)	(۳۴۰۴,۱۱/۳۴۳۶,۳۴۰۷)	(۸۲۵۶۰,۸۲/۸۲۵۶۱,۸۲۵۶۲)	(۱۲۶۱۴,۶۵/۱۲۶۱۶,۱۲۶۱۸)
۸	(۲۸۷۰۰۷,۰۲/۲۸۷۰۰۸,۲۸۷۰۰۹)	(۹۹۸۸,۲۶/۹۹۸۹,۹۹۹۰)	(۹۴۰۱۵,۲۲/۹۴۰۱۶,۹۴۰۱۷)	(۲۴۰۸۷,۰۱/۲۴۰۸۹,۲۴۰۹۰)
۹	(۱۸۱۱۲۹,۳۰/۱۸۱۱۳۰,۱۸۱۱۳۱)	(۱۰۲۸,۱۸/۱۰۲۹,۱۰۳۱)	(۱۰۵۵۳۱,۴۹/۱۰۵۵۳۱,۱۰۵۵۳۲)	(۳۴۲۱,۲۸/۳۴۲۳,۳۴۲۵)
۱۰	(۲۴۰۳۶۴,۷۴/۲۴۰۳۶۵,۲۴۰۳۶۷)	(۲۴۴۷۳,۷۴/۲۴۴۷۵,۲۴۴۷۶)	(۱۹۶۱۲۸,۵۳/۱۹۶۱۲۹,۱۹۶۱۳۰)	(۴۳۲۹۸,۶۳/۴۳۳۰۰,۴۳۳۰۳)
۱۱	(۱۲۶۷۹۴,۳۸/۱۲۶۷۹۵,۱۲۶۷۹۷)	(۶۱۹۵,۱۲/۶۱۹۷,۶۱۹۸)	(۳۸۳۵۷,۳۹/۳۸۳۵۹,۳۸۳۶۰)	(۳۸۷۷,۴۶/۳۸۷۸,۳۸۷۹)
۱۲	۲۰۷۶۳(,۳۲/۲۰۷۶۳۹,۲۰۷۶۴۱)	(۲۶۰۲,۸۷/۲۶۰۳,۲۶۰۴)	(۹۶۶۳۷,۵۹/۹۶۶۳۸,۹۶۶۳۹)	(۴۸۰۷,۰۹/۴۸۰۹,۴۸۱۰)
۱۳	(۲۳۹۹۸۸,۵۶/۲۳۹۹۸۹,۲۳۹۹۹۱)	(۷۱۵۲,۸۰/۷۲۵۳,۷۱۵۵)	(۸۸۱۳۳,۱۲/۸۸۱۳۳,۸۸۱۳۴)	(۹۴۹۴,۰۵/۹۴۹۵,۹۴۹۷)
١٤	(۱۵۴۳۴۸,۴۹/۱۵۴۳۴۹,۱۵۴۳۵۱)	(۲۰۶۵,۳۰/۲۰۶۶,۲۰۶۸)	(۷۸۹۱۶,۶۶/۷۸۹۱۶,۷۸۹۱۷)	(۱۵۳۲۳,۶۷/۱۵۳۲۵,۱۵۳۲۶)
١٥	(۱۸۹۰۲۰,۳۹/۱۸۹۰۲۲,۱۸۹۰۲۴)	(۵۵۱۵,۳۸/۵۵۱۶,۵۵۱۷)	(۶۹۳۹۹,۹۸/۶۹۳۹۹,۶۹۴۰۱)	(۱۹۸۸,۱۱/۱۹۸۹,۱۹۹۱)
١٦	(۱۲۲۳۲۹,۰۳/۱۲۲۳۳۰,۱۲۲۳۳۳)	(۶۷۹۶,۱۰/۶۷۹۸,۶۷۹۹)	(۷۲۶۰۰,۱۱/۷۲۶۰۲,۷۲۶۰۳)	(۳۹۶۵,۶۰/۳۹۶۶,۳۹۶۸)
۱۷	(۱۹۴۸۰۶,۹۱/۱۹۴۸۰۸,۱۹۴۸۱۰)	(۷۴۴۲,۷۸/۷۴۴۳,۷۴۴۵)	(۵۹۲۳۹,۶۵/۵۹۲۳۹,۵۹۲۴۰)	(۳۶۴۷,۶۵/۳۶۴۸,۳۶۴۹)
۱۸	(۱۱۳۵۴۰,۱۱/۱۱۳۵۴۲,۱۱۳۵۴۳)	(۹۹۳۳,۱۳/۹۹۳۵,۹۹۳۶)	(۷۰۳۷۷,۵۱/۷۰۳۷۸,۷۰۳۸۰)	(۱۹۱۶,۰۹/۱۹۱۸,۱۹۲۰)
۱۹	(۱۹۳۱۴۸,۷۳/۱۹۳۸۴۹,۱۹۳۱۵۰)	(۲۴۶۸,۷۸/۲۴۷۰,۲۴۷۱)	(۸۶۶۴۳,۵۷/۸۶۶۴۴,۸۶۶۴۵)	(۷۸۲۰,۵۰/۷۸۲۲,۷۸۲۱)
۲۰	(۲۲۱۵۰۵,۵۷/۲۲۱۵۰۷,۲۲۱۵۰۸)	(۲۵۲۷,۳۴/۲۵۲۸,۲۵۲۹)	(۱۰۷۹۰۴,۴۸/۱۰۷۹۰۵,۱۰۷۹۰۶)	(۱۹۸۴۵,۶۷/۱۹۸۴۷,۱۹۸۴۸)
۲۱	(۲۶۶۸۶۸,۰۱/۲۶۶۸۷۰,۲۶۶۸۷۱)	(۲۳۲۲۴,۹۵/۲۳۲۲۶,۲۳۲۲۷)	(۶۲۵۲۸,۳۴/۶۲۵۳۰,۶۲۵۳۲)	(۸۱۰۶,۶۳/۸۱۰۹,۸۱۱۱)
۲۲	(۱۶۱۸۵۰,۷۸/۱۶۱۸۵۱,۱۶۱۸۵۳)	(۲۴۲۰,۲۶/۲۴۲۲,۲۴۲۳)	(۷۸۸۵۸,۷۷/۷۸۸۵۸,۷۸۸۵۹)	(۲۵۰۹۱,۳۷/۲۵۰۹۴,۲۵۰۹۵)
۲۳	(۲۰۸۳۵۵,۸۷/۲۰۸۳۵۶,۲۰۸۳۵۷)	(۴۵۱۱,۱۵/۴۵۱۲,۴۵۱۴)	(۱۱۴۲۶۲,۰۱/۱۱۴۲۶۴,۱۱۴۲۶۵)	(۹۰۱۰,۶۳/۹۰۱۲,۹۰۱۵)
٢٤	(۲۴۰۳۹۳,۶۰/۲۴۰۳۹۴,۲۴۰۳۹۶)	(۵۱۶۳,۱۶/۵۱۶۳,۵۱۶۵)	(۱۱۸۸۹۰,۷۲/۱۱۸۸۹۲,۱۱۸۸۹۳)	(۳۶۴۵,۴۳/۳۶۴۷,۳۶۴۸)
۲۵	(۱۷۴۳۳۷,۹۹/۱۷۴۳۴۰,۱۷۴۳۴۱)	(۴۲۰,۲۲/۴۲۱,۴۲۵)	(۱۳۷۳۴۲,۵۵/۱۳۷۳۴۳,۱۳۷۳۴۴)	(۳۷۷۳,۱۷/۳۷۸۵۵,۳۷۸۵۸)

به منظور تعیین تراکم شعب بانک با استفاده از مدل‌های پیشنهادی، ابتدا مدل (۵) حل می‌گردد. همان‌طور که پیش از این گفته شد، مدل (۵) میزان کران بالای تراکم واحدهای تصمیم‌گیرنده را گزارش می‌کند. به‌عبارت دیگر، این مدل شرایطی را مورد بررسی قرار می‌دهد که در آن، واحد تحت ارزیابی، DMU_O، دارای بدترین شرایط ممکن و سایر واحدهای تصمیم‌گیرنده در بهترین شرایط ممکن، قرار دارند. برای این منظور، مدل (۵) به ازای سه مقدار برش $\alpha = ۰/۵$ و $\alpha = ۰/۷$ و $\alpha = ۰/۹$ حل می‌شود و نتایج به‌دست آمده، به‌ترتیب، در جدول‌های ۳، ۴ و ۵ گزارش می‌شوند.

جدول ۳ نتایج حاصل از مدل (۵)، به ازای $\alpha = ۰/۵$ را گزارش می‌کند. ستون دوم جدول ۳ مقدار بهینه‌ی مدل (۵) را گزارش می‌کند. ستون‌های سوم، چهارم و پنجم جدول ۳، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقادیر میانی خروجی‌های مطلوب y_1، y_2 و y_3 را نشان می‌دهند. ستون ششم این جدول، میزان تراکم در مقدار میانی خروجی نامطلوب y_4 و ستون هفتم، میزان تراکم در کران بالای خروجی نامطلوب y_4را گزارش می‌کنند. همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای $\alpha = ۰/۵$ واحد ۲۵ دارای بیشترین تراکم در خروجی‌های y_1 و y_2واحد ۱۱ دارای بیشترین تراکم در خروجی y_3، واحد ۳ دارای بیشترین تراکم در مقدار میانی خروجی نامطلوب و واحد ۲۵ دارای بیشترین تراکم در کران بالای خروجی نامطلوب می‌باشند. برای $\alpha = ۰/۷$ جدول ۴ به‌دست می‌آید.

جدول۳. میزان تراکم در کران بالا به ازای $\alpha = ۰/۵$

DMU	φ^*	$s_۱^{+m}$	$s_۲^{+m}$	$s_۳^{+m}$	$s_t^{-bc^m}$	$s_t^{-bc^u}$
۱	۱	۰۵/۲۶	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۷/۳۹	۰	۰	۰	۰
۳	۱	۲/۱۰۵۵۷۰	۰۷/۱۹۳۰۸	۰	۵۹/۳۱۰۵۴	۰
٤	۷۲/۰	۰	۱۱/۲۳۲۲۱	۰	۰	۰
٥	۱	۰	۰	۰	۰	۰
٦	۱	۹۸/۱۳	۰	۰	۰	۰
۷	۷۷/۰	۵/۲۷۳۵۳۸	۲۵۷۶۴/۲۶	۰	۰	۲۸۲۵/۳۶
۸	۰/۹۱	۱۳۵۲۶۲/۲	۱۲۱۲۷/۳	۰	۰	۲۸۷۴۹/۲۶
۹	۱	۱۰۴۷۰۱/۸	۸۳۶۱/۲۸	۱۳۳۸۸/۲۴	۰	۰
۱۰	۱	۲۶/۴۶	۰	۲۲/۰۳	۰	۰
۱۱	۱	۲۴۰۷۶۸/۳	۰	۱۴۶۵۲۹/۴	۰	۰
۱۲	۰/۸	۱۸۷۶/۷۹	۹۷۴۷/۹۴	۰	۰	۰
۱۳	۱	۲۹۰۸۶۴/۱	۱۹۰۲۷/۴۳	۲۱۶۵۶/۴۲	۲۰۳۵/۹۲	۰
۱٤	۰/۶۵	۲۲۴۲۴۸/۹	۲۸۹۶۶/۹۱	۰	۰	۰
۱٥	۱	۰/۰۲	۰	۷/۳	۰	۰
۱٦	۰/۶۷	۱۳۰/۵۵	۰	۰	۰	۰
۱۷	۰/۸۸	۳۶۷۶۶/۱۶	۰	۲۰۰۶۳/۴۶	۰	۰
۱۸	۱	۳۱/۲۸	۰	۱۸/۲۵	۰	۰
۱۹	۰/۸	۲۱۹۴۹۹/۷	۲۴۴۲۷/۰۸	۰	۰	۰
۲۰	۰/۸	۱۱۰۱۶۹/۷	۳۱۰۱۸/۵۴	۰	۰	۰
۲۱	۱	۳۱/۴۶	۰	۴/۰۷	۰	۰
۲۲	۰/۵۵	۶۶۱۲۳/۸	۳۱۴۳۳/۲۴	۰	۳۰۵۸/۶۴	۰
۲۳	۰/۸	۰	۵۹۳۰/۰۹	۰	۰	۰
۲٤	۱	۱۳/۴۱	۰	۰	۰	۰
۲٥	۱	۳۰۷۵۶۸	۳۸۶۵۶/۷۷	۰	۰	۳۱۲۴۶۴/۱

به‌طور مشابه، جدول ۴ نتایج حاصل از مدل (۵)، به ازای $\alpha = ۰/۷$ را گزارش می‌کند. ستون دوم جدول ۴ مقدار بهینه‌ی مدل (۵) را گزارش می‌کند. ستون‌های سوم، چهارم و پنجم جدول ۴، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقادیر میانی خروجی‌های مطلوب $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ را نشان می‌دهند. ستون ششم این جدول، میزان تراکم در مقدار میانی خروجی نامطلوب $y_۴$ و ستون هفتم، میزان تراکم در کران بالای خروجی نامطلوب $y_۴$ را گزارش می‌کنند. همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای $\alpha = ۰/۷$ واحد ۲۵ دارای بیشترین تراکم در خروجی‌های $y_۱$ و $y_۲$، واحد ۱۱ دارای بیشترین تراکم در خروجی $y_۳$، واحد ۲۵ دارای بیشترین تراکم در مقدار میانی خروجی نامطلوب و واحد ۸ دارای بیشترین تراکم در کران بالای خروجی نامطلوب می‌باشند.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

جدول ٤. میزان تراکم در کران بالا به ازای $\alpha = ۰/۷$

DMU	φ^*	$s_۱^{+m}$	$s_۲^{+m}$	$s_۳^{+m}$	$s_t^{-bc^m}$	$s_t^{-bc^u}$
۱	۱	۱۱/۶	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۱۷/۰۱	۰	۰	۰	۰
۳	۱	۷۵۳۹۷/۸۶	۱۳۷۹۲/۲	۰	۲۲۱۸۰/۸۱	۰
٤	۰/۷۲	۰	۱۶۵۸۷/۵۷	۰	۰	۰
٥	۱	۰	۰	۰	۰	۰
٦	۱	۵/۹۹	۰	۰	۰	۰
۷	۰/۷۷	۱۹۵۵۲۳/۳	۱۸۴۰۲/۲۹	۰	۰	۴۷۴۲/۰۲
۸	۰/۹۱	۹۶۶۶۸/۵۲	۸۶۶۳/۳۷	۰	۰	۴۷۹۲۶/۰۶
۹	۱	۷۴۷۶۹/۶۳	۵۹۷۲/۹۶	۹۵۵۰۱/۰۷	۰	۰
۱۰	۱	۱۱/۳۴	۰	۹/۴۴۵۵	۰	۰
۱۱	۱	۱۷۱۹۶۳/۲	۰	۱۰۴۶۵۵/۴	۰	۰
۱۲	۰/۸	۱۳۴۴/۲۳	۶۹۶۲/۸۶	۰	۰	۰
۱۳	۱	۲۰۷۷۵۸/۴	۱۳۵۹۱/۸۵	۱۵۴۶۸/۸	۱۴۵۴/۲	۰
۱٤	۰/۶۵	۱۶۰۱۷۹/۶	۲۰۶۹۲/۳۴	۰	۰	۰
۱٥	۱	۰/۰۱	۰	۳/۱۷	۰	۰
۱٦	۰/۶۷	۹۷/۴۱	۰	۰	۰	۰
۱۷	۰/۸۸	۲۶۲۷۷/۶۸	۰	۱۴۳۲۸/۷۷	۰	۰
۱۸	۱	۱۳/۴	۰	۷/۸۲	۰	۰
۱۹	۰/۸	۱۵۶۸۰۴/۲	۱۷۴۵۰/۶۲	۰	۰	۰
۲۰	۰/۸	۷۸۷۳۵/۴۹	۲۲۱۵۹/۱۴	۰	۰	۰
۲۱	۱	۱۳/۴۸	۰	۱/۷۴	۰	۰
۲۲	۰/۵۵	۴۷۳۱/۲	۲۲۴۵۲/۹	۰	۲۱۸۸/۲۱	۰
۲۳	۰/۸	۰	۴۲۳۶/۷۶	۰	۰	۰
۲٤	۱	۵/۷۵	۰	۰	۰	۰
۲٥	۱	۲۱۹۶۸۹/۴	۲۷۶۱۳/۷۵	۰	۲۲۳۱۸/۴۳	۰

در نهایت، جدول ۵ نتایج حاصل از مدل (۵)، به ازای $\alpha = ۰/۹$ را گزارش می‌کند. ستون دوم جدول ۵ مقدار بهینه‌ی مدل (۵) را گزارش می‌کند. ستون‌های سوم، چهارم و پنجم جدول ۵، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقادیر میانی خروجی‌های مطلوب $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ را نشان می‌دهند. ستون ششم این جدول، میزان تراکم در مقدار میانی خروجی نامطلوب $y_۴$ و ستون هفتم، میزان تراکم در کران بالای خروجی نامطلوب $y_۴$ را گزارش می‌کنند. همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای $\alpha = ۰/۹$ ، واحد ۲۵ دارای بیشترین تراکم در خروجی‌های $y_۱$ و $y_۲$، واحد ۱۳ دارای بیشترین تراکم در خروجی $y_۳$، واحد ۲۵ دارای بیشترین تراکم در کران بالای خروجی نامطلوب می‌باشند.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

پس از آن، مدل (۴)، به‌منظور تعیین میزان کران پایین تراکم واحدهای تصمیم‌گیرنده حل می‌شود. به‌عبارت دیگر، این مدل شرایطی را مورد بررسی قرار می‌دهد که در آن، واحد تحت ارزیابی، DMU_O، دارای بهترین شرایط ممکن و سایر واحدهای تصمیم‌گیرنده در بدترین شرایط ممکن، قرار دارند. برای این منظور، مدل (۴) به ازای سه مقدار برش $\alpha = ۰/۵$ و $\alpha = ۰/۷$ و $\alpha = ۰/۹$ حل می‌شود و نتایج به‌دست آمده، به‌ترتیب، در جدول‌های ۶، ۷ و ۸ گزارش می‌شوند.

جدول ۵. میزان تراکم در کران بالا به ازای $\alpha = ۰/۹$

DMU	φ^*	s_1^{+m}	s_2^{+m}	s_3^{+m}	s_t^{-bc}
۱	۱	۲/۸۹	۰	۰	۰
۲	۱	۴/۳۸	۰	۰	۰
۳	۱	۵۸۶۳۵/۴۴	۱۰۷۲۷/۸۲	۰	۱۷۲۵۰/۹۲
٤	۰/۷۲	۰	۱۲۹۰۲/۲۸	۰	۰
۵	۱	۰	۰	۰	۰
٦	۱	۱/۵۵	۰	۰	۰
۷	۰/۷۷	۱۵۲۱۹۰/۸	۱۴۳۱۲/۴۶	۰	۱۵۹۱/۷
۸	۰/۹۱	۷۵۲۲۷/۵۷	۶۷۳۸/۹۷	۰	۱۵۹۷۸/۹
۹	۱	۵۸۱۴۰/۶۳	۴۶۴۶/۱۱۹	۷۴۱۷/۷۵	۰
۱۰	۱	۲/۹۴	۰	۲/۴۴	۰
۱۱	۱	۱۳۳۷۳۸/۱	۰	۸۱۳۹۲/۱۳	۰
۱۲	۰/۸	۱۰۴۸/۳۷	۴۵۱۵/۶	۰	۰
۱۳	۱	۱۶۱۵۸۸/۵	۱۰۵۷۲/۰۸	۱۲۰۳۱/۲۳	۱۱۳۱/۰۳
۱٤	۰/۶۵	۱۲۴۵۸۵/۵	۱۶۰۹۵/۳۵	۰	۰
۱۵	۱	۰	۰	۰/۸۱	۰
۱٦	۰/۶۷	۷۹/۰۱	۰	۰	۰
۱۷	۰/۸۸	۲۰۴۵۰/۷۴	۰	۱۱۱۴۲/۸۳	۰
۱۸	۱	۳/۴۷	۰	۲/۰۲	۰
۱۹	۰/۸	۱۲۱۹۷۳/۳	۱۳۵۷۴/۸۲	۰	۰
۲۰	۰/۸	۶۱۲۷۲/۰۴	۱۷۲۳۷/۲۶	۰	۰
۲۱	۱	۳/۴۹	۰	۰/۴۵۲۹۴	۰
۲۲	۰/۵۵	۳۶۷۸۱/۹۷	۱۷۴۶۳/۸۳	۰	۱۷۰۴/۶۳
۲۳	۰/۸	۰	۳۲۹۶/۰۲	۰	۰
۲٤	۱	۱/۴۹	۰	۰	۰
۲۵	۱	۱۷۰۸۶۸	۲۱۴۷۸/۷۴	۰	۱۷۳۵۸/۴۵

جدول ۶ نتایج حاصل از مدل (۴)، به ازای $\alpha = ۰/۵$ را گزارش می‌کند. ستون دوم جدول ۶ مقدار بهینه‌ی مدل (۴) را گزارش می‌کند. ستون‌های سوم و چهارم جدول ۶، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقادیر میانی ورودی‌های x_1 و x_2 را نشان می‌دهند. ستون پنجم و ششم این جدول، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقدار کران پایین ورودی‌های x_1 و x_2 و ستون‌ها هفتم، هشتم و نهم این جدول، میزان تراکم در کران بالای خروجی‌های

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

مطلوب y_1 ، y_2 و y_3 را گزارش می‌کنند. همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای $\alpha = ۰/۵$ واحدهای ۴ و ۲۳، به‌ترتیب، دارای بیشترین تراکم در مقدار میانی ورودی‌های x_1 و x_2 ، واحدهای ۷ و ۱۳، به‌ترتیب، دارای بیشترین تراکم در کران پایین ورودی‌های x_1 و x_2 می‌باشند. همچنین، واحد ۲۵ دارای بیشترین میزان تراکم در کران بالای خروجی‌های مطلوب y_1 و y_2، همچنین، واحد ۱۱ دارای بیشترین تراکم در کران بالای خروجی مطلوب y_3 می‌باشند.

جدول ٦. میزان تراکم در کران پایین به ازای $\alpha = ۰/۵$

DMU	φ^*	$s_1^{-c^m}$	$s_2^{-c^m}$	s_{12}^{+l}	s_{22}^{+l}	s_1^{+l}	s_2^{+u}	s_3^{+u}
۱	۱	۰	۲/۲۴	۰	۰	۲۶/۰۵	۰	۰
۲	۱	۰	۳/۰۳	۰	۰	۳۹/۷	۰	۰
۳	۱	۰	۰	۶/۰۴	۵۷۳۴/۴۸	۱۰۵۵۷۰/۲	۱۹۳۰۸/۷	۰
٤	۰/۷۲	۱۰/۲۵	۱۲۵۳/۳۵	۱	۰	۰	۲۳۲۲۱/۱۱	۰
٥	۱	۰	۴/۲۵	۰	۰	۰	۰	۰
٦	۱	۰	۴/۳۲	۰	۰	۱۳/۹۸۴۷	۰	۰
۷	۰/۷۷	۰	۰	۱۱/۵۳	۱۰۸۴۴/۲۶	۲۷۳۵۳۸/۵	۲۵۷۶۴/۲۶	۰
۸	۰/۹۱	۰	۰	۵/۷۸	۵۴۴۲/۴۸	۱۳۵۲۶۲/۲	۱۲۱۲۷/۳	۰
۹	۱	۰	۴	۲/۵۳	۲۴۰۶/۰۷	۱۰۴۷۰۱/۸	۸۳۶۱/۲۸	۱۳۳۸۸/۲۴
۱۰	۱	۰	۰	۰	۰	۲۶/۴۶۱۶	۰	۲۲/۰۳
۱۱	۱	۰	۰	۵/۴۸	۵۱۴۱/۴۱	۲۴۰۷۶۸/۳	۰	۱۴۶۵۲۹/۴
۱۲	۰/۸	۰	۰	۰/۶۱	۵۸۹/۳۷	۱۸۷۶/۷۹	۹۷۴۷/۹۴	۰
۱۳	۱	۰	۰	۱۲	۱۱۱۷۷/۹۸	۲۹۰۷۶۴/۱	۱۹۰۲۷/۴۳	۲۱۶۵۶/۴۲
۱٤	۰/۶۵	۰	۳/۵	۱۰/۲۶	۹۵۲۱/۸۶	۲۲۴۲۴۸/۹	۲۸۹۶۶/۹۱	۰
۱٥	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۷/۳
۱٦	۰/۶۷	۰	۰	۰	۲۶/۳۷	۱۳۰/۵۵	۰	۰
۱۷	۰/۸۸	۰	۳	۴	۳۷۰۹/۵۲	۳۶۷۶۶/۱۶	۰	۲۰۰۶۳/۴۶
۱۸	۱	۰	۰	۰	۰	۳۱/۲۸	۰	۱۸/۲۵
۱۹	۰/۸	۰	۰	۱۰/۱	۹۳۸۱/۰۲	۲۱۹۴۹۹/۷	۲۴۴۲۷/۰۸	۰
۲۰	۰/۸	۰	۲	۵/۴۶	۵۱۶۲/۷۵	۱۱۰۱۶۹/۷	۳۱۰۱۸/۵۴	۰
۲۱	۱	۰	۰	۰	۰	۳۱/۴۶	۰	۴/۰۷
۲۲	۰/۵۵	۰	۰	¾	۳۲۳۶/۷۸	۶۶۱۲۳/۸	۳۱۴۳۳/۲۴	۰
۲۳	۰/۸	۶/۳	۵۸۲۳/۵۴	۰	۰	۰	۵۹۳۰/۰۹	۰
۲٤	۱	۰	۳۱۵۵	۰	۰	۱۳/۴۱	۰	۰
۲٥	۱	۰	۰	۹/۶۳	۸۹۹۰/۲	۳۰۷۵۶۸	۳۸۶۵۶/۷۷	۰

برای $\alpha = ۰/۷$ جدول ۷ به دست می‌آید.

جدول ۷ نتایج حاصل از مدل (۴)، به ازای $\alpha = ۰/۷$ را گزارش می‌کند. ستون دوم جدول ۷ مقدار بهینه‌ی مدل (۴) را گزارش می‌کند. ستون‌های سوم و چهارم جدول ۷، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقادیر میانی

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

ورودی‌های x_1 و x_2 را نشان می‌دهند. ستون پنجم و ششم این جدول، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقدار کران پایین ورودی‌های x_1 و x_2 و ستون‌ها هفتم، هشتم و نهم این جدول، میزان تراکم در کران بالای خروجی‌های مطلوب y_1، y_2 و y_3 را گزارش می‌کنند. همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای $\alpha = ۰/۷$ واحد **۲۳** دارای بیشترین تراکم در مقدار میانی ورودی‌های x_1 و x_2، می‌باشد و واحدهای ۷ و ۱۳، به‌ترتیب، دارای بیشترین تراکم در کران پایین ورودی‌های x_1 و x_2، می‌باشند. همچنین، واحد **۲۵** دارای بیشترین میزان تراکم در کران بالای خروجی‌های مطلوب y_1 و y_2 همچنین، واحد ۱۱ دارای بیشترین تراکم در کران بالای خروجی مطلوب y_3 می‌باشند.

جدول ۷. میزان تراکم در کران پایین به ازای $\alpha = ۰/۷$

DMU	φ^*	$s_1^{-c^m}$	$s_2^{-c^m}$	s_{12}^{+l}	s_{22}^{+l}	s_1^{+u}	s_2^{+u}	s_3^{+u}
۱	۱	۰	۲۴/۲	۰	۰	۰۵/۲۶	۰	۰
۲	۱	۰	۳	۰	۰	۴۵/۳۹	۱۴/۰	۰
۳	۱	۰	۰	۰۷/۱۰	۳۴/۹۵۶۰	۳/۱۷۵۹۲۸	۷۹/۳۲۱۸۱	۰
٤	۷۲/۰	۰۹/۲	۴۹/۲۰۸۶	۰	۰	۰	۳۴/۳۸۷۰۴	۰
٥	۱	۰	۲۵/۴	۰	۰	۰	۰	۰
٦	۱	۰	۳۲/۴	۰	۰	۹۸/۱۳	۰	۰
۷	۷۷/۰	۰	۰	۲۱/۱۹	۳۷/۱۸۰۷۹	۴۵۶۲۳۵	۹۱/۴۲۹۳۸	۰
۸	۹۱/۰	۰	۰	۶۴/۹	۷۷/۹۰۷۴	۹/۲۲۵۵۵۹	۵۴/۲۰۲۱۴	۰
۹	۱	۰	۰	۲۳/۴	۲۵/۴۰۱۴	۵/۱۷۴۴۶۲	۹۲/۱۳۹۳۶	۵/۲۲۲۸۳
۱۰	۱	۰	۴	۰	۰	۴۶/۲۶	۰	۰۳۹/۲۲
۱۱	۱	۰	۰	۱۴/۹	۷۲/۸۵۷۲	۲۴/۴۰	۰	۲۴۴۱۹۶
۱۲	۸/۰	۰	۰	۰۲/۱	۲۵/۹۸۵	۵۵/۳۱۳۶	۶۹/۱۶۲۴۶	۰
۱۳	۱	۰	۰	۲۰	۶۲/۱۸۶۳۲	۵/۴۸۴۷۶۹	۳۱/۳۱۷۱۴	۸۶/۳۶۰۹۳
١٤	۶۵/۰	۰	۰	۱۱/۱۷	۰۳/۱۵۸۷۲	۳/۳۷۳۷۵۲	۱۲/۴۸۲۸۲	۰
١٥	۱	۰	۵/۳	۰	۰	۰	۰	۳/۷
١٦	۶۷/۰	۰	۰	۰	۸۸/۴۵	۳/۲۲۷	۰	۰
۱۷	۸۸/۰	۰	۰	۶۷/۶	۴۷/۶۱۸۶	۵۸/۶۱۳۱۴	۰	۸/۳۳۴۳۳
۱۸	۱	۰	۳	۰	۰	۲۸/۳۱	۰	۲۵/۱۸
۱۹	۸/۰	۰	۰	۸۳/۱۶	۵۳/۱۵۶۳۹	۴/۳۶۵۸۷۶	۱۲/۴۰۷۱۸	۰
۲۰	۸/۰	۰	۰	۱/۹	۲۴/۸۶۰۹	۱/۱۸۳۷۱۶	۶۷/۵۱۷۰۴	۰
۲۱	۱	۰	۲	۰	۰	۴۶/۳۱	۰	۰۷/۴
۲۲	۵۵/۰	۰	۰	۶۶/۵	۲۹/۵۳۹۸	۱/۱۱۰۲۷۶	۱۱/۵۲۳۹۰	۰
۲۳	۸/۰	۵۱/۱۰	۰۲/۹۷۰۳	۰	۰	۰	۷۷/۹۸۸۵	۰
۲٤	۱	۰	۵۵/۳	۰	۰	۴۲/۱۳	۰	۰
۲۵	۱	۰	۰	۰۴/۱۶	۵۳/۱۴۹۸۵	۶/۵۱۲۶۰۸	۰۹/۶۴۴۳۲	۰

برای $\alpha = ۰/۹$ جدول ۸ به دست می‌آید:

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

جدول ۸. میزان تراکم در کران پایین به ازای $\alpha = ۰/۹$

DMU	φ^*	$s_1^{-c^m}$	$s_2^{-c^m}$	s_{12}^{+l}	s_{22}^{+l}	s_1^{+u}	s_2^{+u}	s_3^{+u}
۱	۱	۰	۲/۲۴	۰	۰	۲۶/۰۵	۰	۰
۲	۱	۰	۳/۰۳	۰	۰	۳۹/۷۱	۰	۰
۳	۱	۰	۰	۳۰/۲۲	۲۸۶۸۹/۶۳	۵۲۷۷۱۸/۹	۹۶۵۵۰/۴۱	۰
٤	۰/۷۲	۶/۲۹	۶۲۵۲/۱۷	۰	۰	۰	۱۱۶۱۲۰/۵	۰
٥	۱	۰	۴/۲۵	۰	۰	۰	۰	۰
٦	۱	۰	۴/۳۲	۰	۰	۱۳/۹۸	۰	۰
۷	۰/۷۷	۰	۰	۵۷/۶۶	۵۴۲۵۴/۹	۱۳۶۹۷۱۷	۱۲۸۸۱۲/۲	۰
۸	۰/۹۱	۰	۰	۲۸/۹۳	۲۷۲۳۶/۲۳	۶۷۷۰۴۸/۱	۶۰۶۵۰/۷۳	۰
۹	۱	۰	۰	۱۲/۷	۱۲۰۵۵/۱۴	۵۲۳۲۶۵/۶	۴۱۸۱۵/۰۷	۶۶۷۵۹/۸۲
۱۰	۱	۰	۴	۰	۰	۲۶/۴۶	۰	۲۲/۰۳
۱۱	۱	۰	۰	۲۷/۴۳	۲۵۷۲۹/۲۶	۱۲۰۳۶۴۳	۰	۷۳۲۵۲۹۱۲
۱۲	۰/۸	۰	۰	۳/۰۷	۲۹۶۴/۶۹	۹۴۳۵/۳۷	۴۸۷۴۰/۴۲	۰
۱۳	۱	۰	۰	۶۰	۵۵۹۰۵/۸۲	۱۴۵۴۲۹۶	۹۵۱۴۸/۷۱	۱۰۸۲۸۱/۱
۱٤	۰/۶۵	۰	۰	۵۱/۳۳	۴۷۶۲۲/۸۸	۱۱۲۱۲۷۰	۱۴۴۸۵۸/۲	۰
۱٥	۱	۰	۳/۵	۰	۰	۰	۰	۷/۳
۱٦	۰/۶۷	۰	۰	۰	۱۴۳/۴	۷۱۱/۱۳	۰	۰
۱۷	۰/۸۸	۰	۰	۲۰/۰۴	۱۸۵۷۱/۲۲	۱۸۴۰۵۶/۷	۰	۱۰۰۲۸۵/۵
۱۸	۱	۰	۳	۰	۰	۳۱/۲۸	۰	۱۸/۲۵
۱۹	۰/۸	۰	۰	۵۰/۵۲	۴۶۹۳۲/۰۵	۱۰۹۷۷۶۰	۱۲۲۱۷۳/۴	۰
۲۰	۰/۸	۰	۰	۲۷/۳۳	۲۵۸۴۰/۹۷	۵۵۱۴۴۸/۳	۱۵۵۱۳۵/۳	۰
۲۱	۱	۰	۲	۰	۰	۳۱/۴۶	۰	۴/۰۷
۲۲	۰/۵۵	۰	۰	۱۷	۱۶۲۰۵/۸۶	۳۳۱۰۳۷/۷	۱۵۷۱۷۴/۵	۰
۲۳	۰/۸	۳۱/۵۴	۲۹۱۰۰/۴۲	۰	۰	۰	۲۹۶۶۴/۱۸	۰
۲٤	۱	۰	۳/۵۵	۰	۰	۱۳/۴۲	۰	۰
۲٥	۱	۰	۰	۴۸/۱۴	۴۴۹۶۲/۱۷	۱۵۳۷۸۱۲	۱۹۳۳۰۸/۷	۰

در نهایت، جدول ۸ نتایج حاصل از مدل (۴)، به ازای $\alpha = ۰/۹$را گزارش می‌کند. ستون دوم جدول ۸ مقدار بهینه‌ی مدل (۴) را گزارش می‌کند. ستون‌های سوم و چهارم جدول ۸، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقادیر میانی ورودی‌های x_1 و x_2 را نشان می‌دهند. ستون پنجم و ششم این جدول، به‌ترتیب، میزان تراکم در مقدار کران پایین ورودی‌های x_1 و x_2 و ستون‌ها هفتم، هشتم و نهم این جدول، میزان تراکم در کران بالای خروجی‌های مطلوب y_1 و y_2 و y_3 را گزارش می‌کنند. همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای $\alpha = ۰/۹$ واحد **۲۳** دارای بیشترین تراکم در مقدار میانی ورودی‌های x_1 و x_2 است و واحدهای **۷** و **۱۳**، به‌ترتیب، دارای بیشترین تراکم در کران پایین ورودی‌های x_2 و x_2 می‌باشند. همچنین، واحد **۲۵** دارای بیشترین میزان تراکم در کران

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

بالای خروجی‌های مطلوب y_1 و y_2 همچنین، واحد ۱۱ دارای بیشترین تراکم در کران بالای خروجی مطلوب y_3 می‌باشند.

٦ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در دنیای واقعی مواردی وجود دارد که شرکت‌ها باید داده‌های نامطلوب و فازی را مشخص کنند. به عنوان مثال، وام‌های غیرعملکردی می‌توانند به عنوان یک عامل خروجی نامطلوب در بخش بانکی در نظر گرفته شوند به گونه‌ای که اطلاعات نادرستی در مورد برخی از عوامل مانند وام، درآمد، هزینه‌ها و غیره وجود داشته باشد. بنابراین، مطالعه حاضر رویکرد جدیدی برای برآورد کارایی و تکمیل ظرفیت DMU در مواردی که اندازه‌گیری‌های نامطلوب و فازی وجود دارد، ارایه می‌کند. در واقع، یک مدل DEA فازی برای ارزیابی کارایی DMUs در حضور معیارهای نامطلوب و فازی ارایه شده است. می‌توان این مدل را برای حالت بازه‌ای نیز گسترش داد.

منابع

[1] Fare, R. and Grosskopf, S., (1983). Measuring congestion in production. Zeitschrift fur National okonomie, 43 (3), 257-271.

[2] Fare, R. and Grosskopf, S. and Lovell, C. A. K., (1985). The Measurement of Efficiency of Production, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston, Mass, USA.

[3] Cooper, W. W., Thompson, R. G. Thrall, R. M., (1996). Introduction: extensions and new developments in DEA, Annals of Operations Research, 66, 3-45.

[4] Brockett, P.L., Cooper, W.W., Wang, Y., and Shin, H., (1998). Inefficiency and congestion in Chinese production before and after the 1978 economic reforms, Socio-Economic Planning Sciences, 32 (1), 1–20.

[5] Cooper, W. W., Seiford, L. M., and Zhu, J., (2000). A unified additive model approach for evaluating inefficiency and congestion with associated measures in DEA, Socio-Economic Planning Sciences, 34 (1), 1–25.

[6] Cooper, W. W., Deng, H., Huan, Z. M., Li, S. L., (2002). A one-model approach to congestion in data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, 36, 231-238

[7] Jahanshahloo, G. R., Khodabakhshi, M., (2004). Suitable combination of inputs for improving outputs in DEA with determining input congestion: considering textile industry of China, Applied Mathematics and Computation, 151(1), 263-273.

[8] Khodabakhshi, M., (2009). A one-model approach based on relaxed combinations of inputs for evaluating input congestion in DEA", Journal of Computational and Applied Mathematics, 230 (2), 443-450.

[9] Wei, Q. L., Yan, H., (2004). Congestion and re.turns to scale in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 153, 641–660.

[10] Tone, K. and Sahoo, B. K., (2004). Degree of scale economies and congestion: a unified DEA approach, European Journal of Operational Research, 158 (3), 755–772.

[11] Sueyoshi, T., Sekitani, K., (2009). DEA congestion and returns to scale under an occurrence of multiple optimal projections, European Journal of Operational Research, 194, 592-607.

[12] Seiford, L.M. and Zhu, J., (2002). Modeling undesirable factors inefficiency evaluation, European Journal of Operational Research, 142, (1),16–20.

[13] Jahanshahloo, G.R., Soleimani-damaneh, M., and Rostamy-Malkhalifeh, M., (2005). An enhanced procedure for estimating returns-to-scale in DEA, Applied Mathematics and Computation, 171(2), 1226-1238.

[14] Barzegarinegad, A., Jahanshahloo, G.R., and Rostamy-Malkhalifeh,M., (2014). A Full Ranking for Decision Making Units Using Ideal and Anti-Ideal Points in DEA, THe Scientific World Journal, 11(2), 101-121.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]

[15] Peykani, P., Mohammadi, E., Farzipoor Saen, R., Sajadi, Seyed Jafar., and Rostamy-Malkhalifeh, M., (2020). Data envelopment analysis and robust optimization: A review, ExpertSystem 37 (4), e12534.
[16] Rostamy-Malkhalifeh, M., and Mollaeian, E., (2012). Evaluating performance supply chain by a new non-radial network DEA model with fuzzy data, Journal of Data Envelopment Analysis and Decision Science (2012),1-9.
[17] Razipour-GhalehJough, S., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G.R., Rostamy-malkhalifeh, M., and Sharafi, H., (2020). Finding closest target for bank branches in the presence of weight restrictions using data envelopment analysis, Annals of Operations Research, (288), 755–787.
[18] Peykani, P., Mohammadi, E., Sajadi, Seyed Jafar., and Rostamy-Malkhalifeh, M., (2001). A data envelopment analysis approach to measure the mutual fund performance, European Journal of Operational Research, 135(3), 447-492.
[19] Nazari, S., Rostamy-Malkhalifeh, M., and Hamzehee, A., (2020). An Investigation of the Undesirable Outputs Congestion in Data Envelopment Analysis, Nexo Revista Cientifica, 33 (2), 468-475.
[20] Kordrostami, A., Airteimoori, A., and Jahani Sayyad Noveiri, M., (2016). Ranking of Bank Branches with Undesirable and Fuzzy Data: A DEA-Based Approach, Iranian Journal of Optimization, 8 (2), 71-77.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.79]