

تحلیل مقدار تعادل بازار با رویکرد فازی

فاطمه باباکردی^۱

۱- استادیار، دانشگاه گنبد کاووس، گروه ریاضی و آمار، گنبد کاووس، ایران

رسید مقاله: ۲۳ شهریور ۱۴۰۰

پذیرش مقاله: ۱۴ بهمن ۱۴۰۰

چکیده

در این مقاله برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار، مدل‌بندی معادله‌ی دوگان فازی را در نظر می‌گیریم. با تعریف سه دسته جواب برای معادله‌ی دوگان فازی، قیمت فازی متقارن مینیمال، قیمت فازی متقارن ماکسیمال و قیمت فازی نامتقارن را تعیین کرده و از روی آن نقطه‌ی تعادلی فازی بازار و تابع عرضه و تقاضای فازی را محاسبه می‌کنیم و با بیان قضیه‌ای از شرایطی را مطرح می‌کنیم که تحت آن معادله‌ی دوگان فازی در نظر گرفته شده برای تعیین قیمت فازی بازار، همواره دارای جواب فازی است. با بحث و بررسی ایرادات روش پیشین برای محاسبه‌ی قیمت فازی بازار نشان می‌دهیم که روش پیشنهادی اشکالات روش قبلی را ندارد. در پایان مثال‌های عددی کارایی روش پیشنهادی و برتری روش را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: معادله‌ی خطی دوگان فازی، اعداد فازی، تابع عرضه‌ی فازی، تابع تقاضای فازی، نقطه‌ی تعادل فازی.

۱ مقدمه

در بازار رقابتی قیمت تعادلی و مقدار تعادلی یک کالا با عرضه و تقاضای بازار برای آن کالا تعیین می‌شود. قیمت تعادلی یک کالا دقیقاً برابر با قیمتی است که مصرف کنندگان مقدار کالایی را که حاضرند در یک دوره زمانی خاص بخوبی با مقداری است که تولید کنندگان آن کالا حاضرند عرضه کنند. در قیمت‌های بالاتر کمبود تقاضاً اتفاق و باعث مازاد عرضه می‌شود. این اضافه عرضه به قیمت فشار می‌آورد و باعث می‌شود که قیمت دوباره به سطح تعادلی بازگردد. در قیمت‌های پایین‌تر نیز، مقدار تقاضاً از مقدار عرضه بیشتر می‌شود و باعث مازاد تقاضاً می‌شود. این مازاد تقاضاً باعث افزایش قیمت و در نتیجه بازگشت قیمت به اندازه قبل خود (قیمت تعادلی) می‌شود. پس از این که قیمت به تعادل رسید، این قیمت میل به استمرار و باقی‌ماندن دارد. مدل عرضه و تقاضاً در واقع برای بازار رقابتی تنظیم شده است که در آن هیچ‌یک از خریداران و فروشنده‌گان نمی‌توانند اثر زیادی بر روی قیمت بگذارند، و قیمت به صورت یک داده است. در حالی که در بازار واقعی در نظر گرفتن قیمت به صورت قطعی و ثابت تقریباً غیرممکن است از این رو باستی مساله را با یک روش پوشش

* فاطمه باباکردی

آدرس الکترونیکی: babakordif@yahoo.com

داده‌های غیرقطعی یعنی نظریه فازی در نظر گرفت. مساله‌ی نقطه‌ی تعادلی فازی همواره مورد توجه محققین بوده است. در [۱] سیستم اقتصادی با نقشه‌ی اعداد فازی بررسی شد و تعریفی از سیستم اقتصادی فازی ارایه گردید. در [۲] الگوریتمی برای حل مساله‌ی حداکثر نقطه‌ی تعادل سیستم‌های کنترلی فازی، مطالعه شد. لی و همکاران با استفاده از قضیه‌ی نقطه ثابت و ساخت تابع لیپاونف، شرایط کافی وجود و منحصر‌بفرد بودن و پایداری نمایی نقطه‌ی تعادل برای یک کلاس از شبکه‌های عصبی BAM فازی با تاخیر و تکانه‌های بینهایت در مقیاس‌های زمانی را بررسی کردند [۳].

مدل‌بندی دستگاه و معادله‌ی خطی فازی توصیف خوبی برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار می‌باشد. تاکنون پژوهش‌های زیادی در زمینه‌ی دستگاه معادلات خطی فازی صورت گرفته است [۱۱-۱۲]. در [۱۲] ما و همکاران به حل دستگاه دوگان به فرم $A\tilde{X} = B\tilde{Y} + \tilde{Y}$ که در آن A و B ماتریس حقیقی و \tilde{Y} بردار فازی می‌باشد، پرداختند و نشان دادند که در حالت فازی نمی‌توان دستگاه $A\tilde{X} = B\tilde{Y} + \tilde{Y}$ را با $\tilde{Y} = (A - B)\tilde{X}$ جایگزین نمود. در سال ۲۰۰۸ عباسنده و همکاران با تبدیل دستگاه دوگان فازی به دستگاه قطعی جواب فازی مینیمال، برای حل این دستگاه را بیان کردند [۱۳]. سپس اوتاوی روشی برای حل دستگاه دوگان فازی مطرح کرد به طوری که در شرایط خاص دستگاه دارای جواب فازی است [۱۴].

اخیرا برنامه‌ریزی خطی برای حل دستگاه دوگان کاملاً فازی به کار گرفته شد [۱۵] و سپس قبری و همکاران به بیان روش جبری برای حل دستگاه دوگان کاملاً فازی پرداختند [۱۶]. در [۱۷] شرایط وجودی نقطه‌ی تعادل فازی برای دستگاه خطی فازی $(k+1)\tilde{X} = \tilde{A}\tilde{X}$ و مفهوم نقطه‌ی تعادلی تعیین یافته‌ی سیستم خطی فازی مطرح شد. ملیانی و همکاران با بحث روی دستگاه دینامیکی فازی مخلوط مفهوم نقطه‌ی تعادل فازی مخلوط را معرفی کردند [۱۸].

خیری و همکاران در [۱۹]، با استفاده از حل دستگاه معادلات خطی فازی، به تعیین مقدار تعادلی بازار پرداختند. در این مقاله بیان می‌کنیم، از آنجایی که دستگاه دوگان فازی و دستگاه فازی در حالت کلی با هم معادل نیستند، پس روش خیری و همکاران دارای نقص است که بایستی اصلاح گردد. لذا روشی برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار پیشنهاد می‌کنیم که دارای ایراد فوق نباشد [۲۰-۲۱].

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ تعاریف پایه‌ای مورد نیاز را مطرح کرده و در بخش ۳ به مرور و بررسی روش خیری و همکاران می‌پردازیم. در بخش ۴ مدل‌بندی فازی و روشی کاربردی برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار ارایه می‌دهیم. مثال‌های عددی در بخش ۵ آورده شده و نتیجه‌گیری و کارهای آتی در بخش ۶ مطرح شده است.

۲ تعاریف پایه‌ای

تعریف ۲-۱ [۲۲-۲۳] شکل پارامتری یک عدد فازی $(r)\tilde{u}$ یک زوج از توابع $(\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ است که در آن توابع (r) و $\bar{u}(r)$ برای مقادیر $1 \leq r \leq$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. تابع $\underline{u}(r)$ تابعی غیرکاهشی نیمه پیوسته از چپ کراندار روی بازه $[0, 1]$ است.
۲. تابع $\bar{u}(r)$ تابعی غیرافراشی نیمه پیوسته از چپ کراندار روی بازه $[0, 1]$ است.
۳. $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$ برای مقادیر $1 \leq r \leq 0$.

در تعریف بالا اگر $\underline{u}(r)$ و $\bar{u}(r)$ توابع خطی باشند، نمایش پارامتری یک عدد فازی مثلثی به دست می‌آید و عدد فازی $\tilde{u}(r)$ را مثبت گوییم هرگاه بازای هر $0 \leq r \leq 1$ ، $\underline{u}(r), \bar{u}(r) \geq 0$ باشد.

تعریف ۲-۲. برای دو عدد فازی مثلثی دلخواه $(\underline{x}(r), \bar{x}(r))$ و $(\underline{y}(r), \bar{y}(r))$ و عدد حقیقی k ، جمع، ضرب اسکالر و تفریق به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{x} + \tilde{y} = (\underline{x}(r) + \underline{y}(r), \bar{x}(r) + \bar{y}(r)), \quad (1)$$

$$k\tilde{x} = (k\underline{x}(r), k\bar{x}(r)), k \geq 0, \quad (2)$$

$$k\tilde{x} = (k\bar{x}(r), k\underline{x}(r)), k < 0, \quad (3)$$

$$\tilde{x} - \tilde{y} = (\underline{x}(r) - \underline{y}(r), \bar{x}(r) - \bar{y}(r)), \quad (4)$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = (\underline{x}(r) \underline{y}(r), \bar{x}(r) \bar{y}(r)), \tilde{x}, \tilde{y} \geq 0. \quad (5)$$

۳ روش خیبری و همکاران برای تعیین نقطه تعادلی بازار
خیبری و همکاران در [۱۹]، عرضه و تقاضا فازی را به صورت توابعی خطی از قیمت به صورت

$$\begin{cases} q_d = a^* p + b \\ q_s = c^* p + d \end{cases} \quad (6)$$

که در آن q_d و q_s به ترتیب مقادیر تقاضا و عرضه هستند و پارامتر p قیمت و a و c اعداد حقیقی قطعی، b و d ضرایبی هستند که می‌بایست تعیین شوند، در نظر گرفتن و بیان کردن دو گانه دستگاه دلخواه بازار که در آن $q_d = q_s = q$ ، بایستی دستگاه دوگانه فازی به فرم

$$\begin{cases} q = a^* p + b \\ q = c^* p + d \end{cases} \quad (7)$$

را حل کنیم و برای حل (۷) بایستی آن را به صورت

$$\begin{cases} q - a^* p = b \\ q - c^* p = d \end{cases} \quad (8)$$

که یک دستگاه فازی می‌باشد، تبدیل کرده و به روش حل دستگاه فازی حل نمود. آنها در مثالی روابط بین عرضه و تقاضا را به صورت زیر در نظر گرفتند:

$$\begin{cases} q_d = \tilde{p} + \tilde{\delta} \\ q_s = -\tilde{p} + 13 \end{cases} \quad (9)$$

و بیان داشتند که اگر \tilde{x}_1 و \tilde{x}_r به ترتیب مقادیر فازی عرضه (تقاضا) و مقدار فازی قیمت در نظر گرفته شوند در این صورت با برابر قرار دادن مقادیر عرضه و تقاضا می‌باشد یک دستگاه معادلات خطی فازی به صورت زیر حل شود:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{x}_r + \tilde{\delta} \\ \tilde{x}_1 = -3\tilde{x}_r + 13 \end{cases} \quad (10)$$

با دوباره نویسی معادلات بالا، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_r = \tilde{\delta} \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_r = 13 \end{cases} \quad (11)$$

که در آن اعداد فازی مثلثی $\tilde{\delta}$ و 13 را به ترتیب به صورت پارامتری $(9+4r, 17-4r)$ و $(3+2r, 7-2r) = \tilde{\delta}$ در نظر گرفتند و با حل دستگاه فازی به دست آوردند:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_r = (3+2r, 7-2r) \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_r = (9+4r, 17-4r) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (6+r, 8-r) \\ \tilde{x}_r &= (1+r, 3-r) \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین مقدار تقاضای فازی (همچنین عرضه فازی) و مقدار قیمت فازی به ترتیب عبارتند از \tilde{x}_1 و \tilde{x}_r .

۳-۱۱- ایرادات روش خیری و همکاران

در این بخش به بیان ایراد اساسی روش خیری و همکاران می‌پردازیم.

ایراد اساسی واردۀ این است که آنها برای حل دستگاه دوگان فازی (۲) آنرا به فرم دستگاه فازی (۳) تبدیل کرده و حل کردند. در صورتی که اگر چه این دو سیستم در حالت قطعی معادلند، در حالت فازی این دو دستگاه معادل نیستند.

اگر $\tilde{x}_r = (\underline{x}_r(r), \bar{x}_r(r))$ و $\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r))$ دو میان معادله $3\tilde{x}_r$ را اضافه کنیم، داریم:

$$\begin{cases} (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r)) - (\underline{x}_r(r), \bar{x}_r(r)) = (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r)) - (\underline{x}_r(r), \bar{x}_r(r)) + (3+2r, 7-2r) \\ (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r)) + (3\underline{x}_r(r), 3\bar{x}_r(r)) = (-3\underline{x}_r(r), -3\bar{x}_r(r)) + (3\underline{x}_r(r), 3\bar{x}_r(r)) + (9+4r, 17-4r) \end{cases}$$

با به کار گیری اعمال تعریف ۲-۱. به دست می‌آوریم:

(۱۵)

$$\begin{cases} (\underline{x}(r) - \bar{x}_r(r), \bar{x}_i(r) - \underline{x}_i(r)) = (\underline{x}_r(r) - \bar{x}_r(r) + 3 + 2r, \bar{x}_r(r) - \underline{x}_r(r) + 7 - 2r) \\ (\underline{x}(r) + 3\underline{x}_r(r), \bar{x}_i(r) + 3\bar{x}_r(r)) = (-3\bar{x}_r(r) + 3\underline{x}_r(r) + 9 + 4r, -3\underline{x}_r(r) + 3\bar{x}_r(r) + 17 - 4r) \end{cases}$$

از طرف دیگر با به کارگیری اعمال تعریف شده در تعریف ۲-۱. در طرفین دستگاه (۴) به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (\underline{x}(r) - \bar{x}_r(r), \bar{x}_i(r) - \underline{x}_i(r)) = (3 + 2r, 7 - 2r) \\ (\underline{x}(r) + 3\underline{x}_r(r), \bar{x}_i(r) + 3\bar{x}_r(r)) = (9 + 4r, 17 - 4r) \end{cases} \quad (۱۶)$$

مشاهده می‌کنیم که طرف چپ دستگاه معادلات (۸) و (۹) یکی هستند، در صورتی که طرف راست آنها در حالت کلی با هم برابر نمی‌باشند، یعنی دستگاه (۲) قابل تبدیل به دستگاه (۳) نیست. لذا در ادامه روشی برای تعیین مقدار تعادلی بازار ارایه می‌دهیم که بدون تبدیل دستگاه دوگان فازی به دستگاه فازی نقطه‌ی تعادلی فازی بازار را تعیین می‌کند.

۴ مدل‌سازی و تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار تعریف ۴-۱. به معادله‌ی

$$\tilde{a} + b\tilde{x} = \tilde{c} + d\tilde{x} \quad (۱۷)$$

که در آن \tilde{a}, \tilde{c} اعداد فازی معلوم و b, d اعداد حقیقی معلوم و \tilde{x} عدد فازی مجهول می‌باشد، معادله‌ی دوگان فازی می‌گوییم.

تعریف ۴-۲. سه دسته جواب معادله‌ی (۱۰) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

الف. مجموعه جواب متحد

$$X_{\exists\exists} = \left\{ x' : (\exists a \in \tilde{a})(\exists c \in \tilde{c}) s.t. a + bx' = c + dx' \right\} = \left\{ x' : (\tilde{a} + bx') \cap (\tilde{c} + dx') \neq \emptyset \right\}, \quad (۱۸)$$

ب. مجموعه جواب قابل قبول

$$X_{\forall\exists} = \left\{ x' : (\forall a \in \tilde{a})(\exists c \in \tilde{c}) s.t. a + bx' = c + dx' \right\} = \left\{ x' : (\tilde{a} + bx') \subseteq (\tilde{c} + dx') \right\}, \quad (۱۹)$$

ج. مجموعه جواب قابل کنترل

$$X_{\exists\forall} = \left\{ x' : (\exists a \in \tilde{a})(\forall c \in \tilde{c}) s.t. a + bx' = c + dx' \right\} = \left\{ x' : (\tilde{a} + bx') \supseteq (\tilde{c} + dx') \right\}, \quad (۲۰)$$

تابع تقاضا فازی: اصطلاح تقاضا میان کل وضعیت امکانات فردی است که وی را قادر به خرید کالاها در قیمت‌های متفاوت می‌نماید و با فرض ثابت بودن سایر شرایط، بیان می‌کند که چه ارتباطی میان جهت و مقدار درخواستی کالا وجود دارد. عوامل مختلفی نظیر قیمت خود کالا، درآمد مصرف کننده، تعداد مصرف کننده‌گان در بازار، سلیقه و ترجیحات مصرف کننده‌گان، دامنه انتخاب و تعداد مصرف کننده، انتظارات قیمتی و قیمت سایر کالاهای مرتبط بر میزان تقاضا تأثیرگذار می‌باشد که با ثابت در نظر گرفتن عوامل موثر بر تقاضا به غیر از قیمت فازی کالای x ، تابع تقاضا فازی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{f}(\tilde{p}_x(r)) \quad (21)$$

بدون آنکه به کلیت کار خللی وارد شود، می‌توان تابع تقاضای فازی را به فرم خطی درنظر گرفت.

$$\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{a}(r) - b\tilde{p}_x(r) \quad (22)$$

که در آن $\tilde{a}(r)$ عدد فازی مثلثی مثبت معلوم و b عدد حقیقی مثبت معلوم و $\tilde{Q}_x^d(r), \tilde{p}_x(r)$ اعداد فازی مثلثی مثبت مجهول می‌باشند.

تابع عرضه فازی: منظور از عرضه مقدار کالا و خدماتی است که تولید کنندگان حاضرند در قیمت‌های مختلف در اختیار مصرف کنندگان قرار دهند که عواملی نظیر قیمت کالا، هزینه‌ی تولید و... در عرضه موثر می‌باشند که با ثابت در نظر گرفتن بقیه‌ی عوامل به غیر از قیمت فازی، تابع عرضه‌ی فازی کالای x توسط تولید کننده به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{f}(\tilde{p}_x(r)) \quad (23)$$

بدون آنکه به کلیت کار خللی وارد شود، می‌توان تابع عرضه‌ی فازی را به فرم خطی درنظر گرفت.

$$\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{c}(r) + d\tilde{p}_x(r) \quad (24)$$

که در آن $\tilde{c}(r)$ عدد فازی مثلثی مثبت معلوم و d عدد حقیقی مثبت معلوم و $\tilde{Q}_x^s(r), \tilde{p}_x(r)$ اعداد فازی مثلثی مثبت مجهول می‌باشند.

نقطه‌ی تعادلی فازی بازار: منظور از نقطه‌ی تعادلی فازی بازار، نقطه‌ای است که در آن میزان عرضه فازی یک کالا با میزان تقاضا فازی بازار حدوداً برابر می‌باشد. در این حالت تقاضاً کننده تقریباً همان مقدار کالایی را می‌خواهد که فروشنده قصد عرضه آن را دارد و فروشنده حدوداً همان میزان کالایی که تولید کرده می‌فروشد.

مدل ریاضی مقدار تعادلی فازی بازار: تابع تقاضای فازی و عرضه‌ی فازی به ترتیب به فرم $\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{c}(r) + d\tilde{p}_x(r)$ و $\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{a}(r) - b\tilde{p}_x(r)$ که در آن $\tilde{a}(r) = (\underline{a}(r), \bar{a}(r))$ و $\tilde{c}(r) = (\underline{c}(r), \bar{c}(r))$ اعداد فازی مثلثی مثبت معلوم و b, d اعداد حقیقی مثبت معلوم و $\tilde{p}(r) = (\underline{p}(r), \bar{p}(r))$ عدد فازی مثلثی مثبت مجهول هستند را در نظر بگیرید، برای تعیین مقدار تعادلی فازی بازار، ابتدا قیمت فازی تعادلی را با حل معادله $\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{Q}_x^s(r)$ که یک معادله‌ی دوگان فازی به صورت زیر می‌باشد، تعیین می‌کنیم:

$$(\underline{a}(r), \bar{a}(r)) - b(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) = (\underline{c}(r), \bar{c}(r)) + d(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) \quad (25)$$

۵ مدل‌سازی و تعیین مقدار تعادلی فازی بازار

۵-۱ تعیین مقدار تعادلی فازی متقارن بازار

برای حل معادله‌ی (۱۱) ابتدا قرار می‌دهیم $r = 1$ و با حل معادله‌ی زیر $\underline{p}(1) = \bar{p}(1) = p$ را به دست می‌آوریم:

$$(\underline{a}(1), \bar{a}(1)) - b(p, p) = (\underline{c}(1), \bar{c}(1)) + d(p, p) \quad (26)$$

حال برای محاسبه‌ی گستره‌ها معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(\underline{a}(r), \bar{a}(r)) - b(p - \alpha, p + \alpha) = (\underline{c}(r), \bar{c}(r)) + d(p - \alpha, p + \alpha) \quad (27)$$

با اعمال حسابی تعریف ۱-۲ به دست می‌آوریم:

$$\underline{a}(r) - b(p + \alpha) = \underline{c}(r) + d(p - \alpha) \quad (28)$$

و

$$\bar{a}(r) - b(p - \alpha) = \bar{c}(r) + d(p + \alpha) \quad (29)$$

در ادامه بجای α در معادله‌ی اول α_{11} و بجای α در معادله‌ی دوم α_{12} ، قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم:

$$\alpha_{11} = \frac{\underline{a}(r) - \underline{c}(r) - bp - dp}{b - d}, \quad (30)$$

$$\alpha_{12} = \frac{\bar{a}(r) - \bar{c}(r) - bp - dp}{d - b}, \quad (31)$$

سرانجام گستره‌های متقارن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_s^- = \min_{r \leq r} \{|\alpha_{11}|, |\alpha_{12}|\}, \quad (32)$$

$$\alpha_s^+ = \max_{r \leq r} \{|\alpha_{11}|, |\alpha_{12}|\}, \quad (33)$$

جواب متقارن فازی معادله‌ی (11) به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\tilde{p}^-(r) = (p - \alpha_s^-, p + \alpha_s^-), \quad (34)$$

$$\tilde{p}^+(r) = (p - \alpha_s^+, p + \alpha_s^+), \quad (35)$$

۲-۵ تعیین مقدار تعادلی فازی نامتقارن بازار

برای مشخص کردن مقدار تعادلی فازی نامتقارن بازار $(p, \alpha, \beta) = \tilde{p}$ و پس از محاسبه‌ی مقدار p از (12)،

برای محاسبه‌ی گستره‌ها معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(\underline{a}(r), \bar{a}(r)) - b(p - \alpha, p + \beta) = (\underline{c}(r), \bar{c}(r)) + d(p - \alpha, p + \beta) \quad (36)$$

با اعمال حسابی تعریف ۱-۲ و برابر قرار دادن طرفین (۲۲)، به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} d\alpha - b\beta = (\underline{c}(r) - \underline{a}(r)) + (b+d)p \\ b\alpha - d\beta = (\bar{c}(r) - \bar{a}(r)) + (b+d)p \end{cases} \quad (37)$$

که سرانجام با به کار گیری روش کرامر از (۲۳) داریم:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (\underline{c}(r) - \underline{a}(r)) + (b+d)p & -b \\ (\bar{c}(r) - \bar{a}(r)) + (b+d)p & -d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & (\underline{c}(r) - \underline{a}(r)) + (b+d)p \\ b & (\bar{c}(r) - \bar{a}(r)) + (b+d)p \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} d & (\underline{c}(r) - \underline{a}(r)) + (b+d)p \\ b & (\bar{c}(r) - \bar{a}(r)) + (b+d)p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & -b \\ b & -d \end{vmatrix}} \quad (38)$$

تذکر ۵-۲-۱. قیمت فازی نامتقارن، قیمت فازی متقارن ماسیمال و قیمت فازی متقارن مینیمال را به روش‌های بیان شده در بالا محاسبه می‌کنیم و با قراردادن در معادلات عرضه و تقاضای فازی، نقطه‌ی تعادلی فازی بازار را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۵-۱. هرگاه $(b-d) \neq (b+d)$ ، معادله‌ی دوگان فازی (۲۵)، دارای جواب فازی منحصر‌بفرد است. اثبات. جواب معادله‌ی دوگان فازی (۲۵)، به صورت $\tilde{p}(r) = (p-\alpha, p+\beta)$ ، می‌باشد که در آن p از (۲۶) با قرار دادن $\underline{c}(1), \bar{c}(1) = c \underline{a}(1), \bar{a}(1) = a$ و $b-d \neq b+d$ ، چون $\tilde{p}(r) = (p-\alpha, p+\beta)$ ، یعنی p ، از (۳۹) به صورت منحصر‌بفرد تعیین می‌گردد. از طرفی برای تعیین گستره‌ها، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- جواب فازی متقارن: در این حالت $b-d \neq b+d$ ، گستره‌ها به صورت منحصر‌بفرد از (۳۰) و (۳۱)، تعیین می‌گردند.
- جواب فازی نامتقارن: در این حالت $b-d \neq b+d$ ، یعنی $b-d \neq -d$ ، بنابراین در این حالت نیز گستره‌ها به صورت منحصر‌بفرد از (۳۸)، به دست می‌آیند. لذا حکم برقرار است.

۶ مثال‌های عددی

مثال ۶-۱. در این مثال روابط بین عرضه و تقاضا که در مقاله‌ی خیری و همکاران [۱۹]، به صورت زیر در نظر گرفته شده بود:

$$\begin{cases} \tilde{q}_d = \tilde{p} + \tilde{\delta} \\ q_s = -3\tilde{p} + 13 \end{cases} \quad (39)$$

را با روش‌های پیشنهادی با فرض $\tilde{p} = (\underline{p}(r), \bar{p}(r))$ حل می‌کنیم:
 $(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) + (3+2r, 7-2r) = -3(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) + (9+4r, 17-4r)$,
با قرار دادن $r=1$ ، $\underline{p}(1), \bar{p}(1) = 2$ به دست می‌آوریم و برای محاسبه‌ی قیمت فازی متقارن ماسیمال و مینیمال معادله‌ی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$(2-\alpha, 2+\alpha) + (3+2r, 7-2r) = -3(2-\alpha, 2+\alpha) + (9+4r, 17-4r) \quad (41)$$

از (۱۷-۱۲) داریم:

$$\alpha_{11} = -1+r, \quad (42)$$

$$\alpha_{12} = -1+r, \quad (43)$$

بنابراین از (۱۸-۱۹) به دست می‌آوریم:

$$\tilde{p}^-(r) = \tilde{p}^+(r) = (2 - |-1+r|, 2 + |-1+r|) = (1+r, 3-r) = \tilde{\mathbf{z}}, \quad (44)$$

سرانجام نقطه‌ی تعادلی فازی متقارن بازار با به کارگیری (۲۵)، (۲۶) یعنی

$$(1+r, 3-r), (7r, 14-7r), ((1+r, 3-r), (4+3r, 10-3r)) \text{ خواهد بود.}$$

برای تعیین قیمت فازی نامتقارن معادله‌ی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$(2-\alpha, 2+\beta) + (3+2r, 7-2r) = -3(2-\alpha, 2+\beta) + (9+4r, 17-4r) \quad (45)$$

که در این حالت نیز به دست می‌آوریم:

$$\alpha = \beta = -1+r \quad (46)$$

بنابراین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار یا ((1+r, 3-r), (4+3r, 10-3r)) یا ((1+r, 3-r), (7r, 14-7r)) خواهد بود که انتخاب به عهده‌ی تصمیم‌گیرنده است.

در مقایسه‌ی نقطه‌ی تعادلی فازی به دست آمده با این روش و نقطه‌ی تعادلی فازی به دست آمده به روش خبیری و همکاران دقت کنید که آنها پول فازی \tilde{x}_i (\tilde{p}) را $(1+r, 3-r)$ به دست آورده‌اند که اگر این مقدار را در اولین معادله‌ی دستگاه (۲۵) قرار دهیم $\tilde{q}_d = (4+3r, 10-3r)$ بدست می‌آید و اگر در دومین معادله‌ی دستگاه (۲۵) قرار دهیم $\tilde{q}_s = (7r, 14-7r)$ به دست می‌آید. چند نکته در اینجا وجود دارد:

۱. در اغلب موارد تابع عرضه بر حسب قیمت صعودی و تابع تقاضا نزولی است، بنابراین بايستی جای s و

d عوض گردد و صورت سوال به فرم زیر اصلاح گردد:

$$\begin{cases} \tilde{q}_s = \tilde{p} + \tilde{\delta} \\ \tilde{q}_d = -3\tilde{p} + 13 \end{cases} \quad (47)$$

۲. در [۱۴]، مقدار عرضه و تقاضا در نقطه‌ی تعادل را برابر با $(6+r, 8-r)$ بیان کردند. در صورتی که با جاگذاری قیمت تعادلی $(1+r, 3-r)$ ، در معادله‌ی اول دستگاه (۲۵)، $(4+3r, 10-3r)$ و در معادله‌ی دوم دستگاه (۲۵)، $(7r, 14-7r)$ ، را به دست می‌آوریم.

۳. طبق تعریف ۳-۵ مقاله‌ی آنها اگر $(\underline{q}_s(r), \bar{q}_s(r)) = (\underline{q}_d(r), \bar{q}_d(r))$ در نقطه‌ی تعادلی فازی بايستی $\bar{q}_d(r) = \bar{q}_s(r)$ و $\underline{q}_d(r) = \underline{q}_s(r)$ اما مشاهده می‌کنیم در این مثال در قیمت تعادلی، $\tilde{q}_s \neq \tilde{q}_d$.

طبق دسته جواب‌های تعریف شده در این مقاله، قیمت تعادلی $(1+r, 3-r)$ ، یک جواب قابل قبول

برای معادله‌ی تعادل $\tilde{q}_d = \tilde{q}_s$ ، می‌باشد (چون $(7r, 14-7r) \subseteq (4+3r, 10-3r)$).

بنابراین روش ما ایرادات [۱] را ندارد.

مثال ۶-۲. فرض کنید تابع عرضه و تقاضای فازی کالای x ترتیب به صورت $\tilde{p}_x = (r, 3-2r) + 3\tilde{p}_x^s$ و $\tilde{Q}_x^d = (18+3r, 24-3r) - 2\tilde{p}_x^d$ باشد، می‌خواهیم مقدار تعادلی فازی بازار و میزان عرضه و تقاضای فازی در قیمت تعادلی را محاسبه کنیم، بدین منظور معادله‌ی (۱۱) را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$(r, 3 - 2r) + 3(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) = (18 + 3r, 24 - 3r) - 2(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) \quad (48)$$

با قرار دادن $r = 1$ به دست می‌آوریم:

- مقدار تعادلی فازی متقارن: معادله (۱۳) را به فرم زیر تشکیل می‌دهیم:

$$(r, 3 - 2r) + 3(4 - \alpha, 4 + \alpha) = (18 + 3r, 24 - 3r) - 2(4 - \alpha, 4 + \alpha) \quad (49)$$

$$\alpha_{11} = -2r + 2, \quad (50)$$

$$\alpha_{12} = -r + 1, \quad (51)$$

بنابراین:

$$\tilde{p}^-(r) = (4 - (-r + 1), 4 + (-r + 1)) = (3 + r, 5 - r), \quad (52)$$

$$\tilde{p}^+(r) = (4 - (-2r + 2), 4 + (-2r + 2)) = (2 + 2r, 6 - 2r), \quad (53)$$

نمودار آنها در شکل ۱ نشان داده شده است و نقطه‌ی تعادلی بازار $(4, 13)$ می‌باشد، یعنی

$$(\tilde{p}^-(r), \tilde{Q}_x^{-s}) = ((3 + r, 5 - r), (9 + 4r, 18 - 5r)), \quad (54)$$

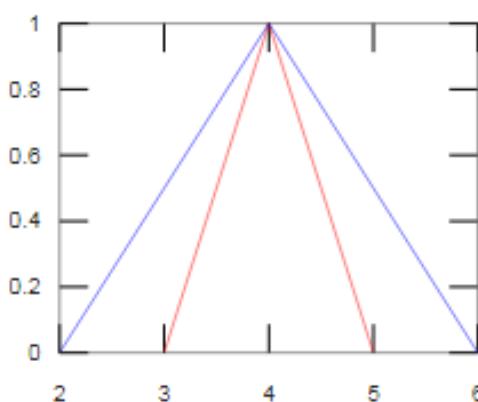
یا

$$(\tilde{p}^-(r), \tilde{Q}_x^{-d}) = ((3 + r, 5 - r), (8 + 5r, 18 - 5r)), \quad (55)$$

$$(\tilde{p}^+(r), \tilde{Q}_x^{+s}) = ((2 + 2r, 6 - 2r), (6 + 7r, 21 - 8r)), \quad (56)$$

$$(\tilde{p}^+(r), \tilde{Q}_x^{+d}) = ((2 + 2r, 6 - 2r), (6 + 7r, 20 - 7r)). \quad (57)$$

شکل ۱. نمایش $\tilde{p}^-(r)$ ، یک جواب قابل قبول برای معادله $\tilde{Q}_x^{-s} = \tilde{Q}_x^{-d}$ و $\tilde{p}^+(r)$ ، یک جواب قابل کنترل برای $\tilde{Q}_x^{+s} = \tilde{Q}_x^{+d}$ می‌باشد.



شکل ۱. نمایش $\tilde{p}^-(r)$ (نمودار قرمز) و $\tilde{p}^+(r)$ (نمودار آبی) در مثال ۲-۴

- مقدار تعادلی فازی نامتقارن: معادله (۲۲) را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$(r, 3 - 2r) + 3(4 - \alpha, 4 + \beta) = (18 + 3r, 24 - 3r) - 2(4 - \alpha, 4 + \beta) \quad (58)$$

از (۲۴) و (۲۷)، به دست می‌آوریم:

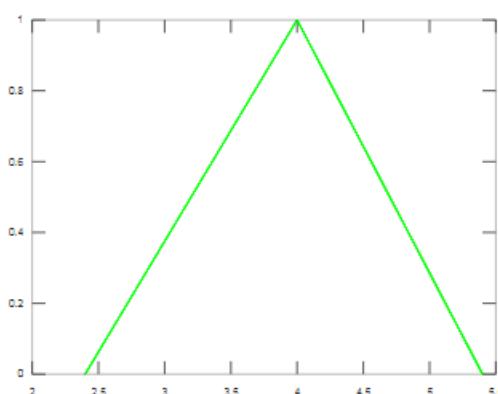
$$\alpha = \frac{-\lambda r + \lambda}{5}, \quad \beta = \frac{-\gamma r + \gamma}{5} \quad \text{بنابراین قیمت} \quad (59)$$

فازی نامتقارن به صورت زیر است:

$$\tilde{p}(r) = \left(\gamma - \left(\frac{-\lambda r + \lambda}{5} \right), \gamma + \left(\frac{-\gamma r + \gamma}{5} \right) \right) \quad (60)$$

که قیمت تعادلی فازی نامتقارن در شکل ۲ نشان داده شده است و مقدار تعادلی بازار

$$\tilde{Q}_x^s = \tilde{Q}_x^s = \left(\frac{36}{5} + \frac{29}{5}r, \frac{96}{5} - \frac{31}{5}r \right)$$



شکل ۲. نمایش $\tilde{p}(r)$ (نمودار سبز) در مثال ۲-۴

۷ نتیجه‌گیری

باتوجه به شرایط اقتصادی جهان به علت آسیب‌های ناشی از کروناویروس، وجود اطلاعات دقیق در زمینه‌های اقتصادی برای تصمیم‌گیری امکان‌پذیر نیست، از آنجایی که یکی از مباحث کلیدی در اقتصاد نقطه‌ی تعادلی بازار است؛ لذا در این مقاله به تحلیل نقطه‌ی تعادلی بازار با رویکرد فازی پرداختیم. از مزایای روش پیشنهادی این است که قیمت تعادلی فازی متقارن مینیمال، قیمت تعادلی فازی متقارن ماکسیمال و قیمت تعادلی فازی نامتقارن را به روش پیشنهادی محاسبه می‌کنیم و در پایان تصمیم‌گیرنده جوابی که به مساله واقعی نزدیک‌تر است را به عنوان جواب نهایی سیستم انتخاب می‌کند. در پژوهش بعدی تردیدهای ناشی از تصمیم‌گیری را نیز در مدل‌سازی در نظر می‌گیریم و به تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی مردد بازار خواهیم پرداخت.

منابع

- [1] Miao, Y.S.: The Equilibrium Point in Fuzzy Economic Systems. J. of Fuzzy Systems and Mathematics 6(1), 9–14 (1992).
- [2] Zhu, K.P., Zhong, M.Y., Tang, B.Y.: Study on Algorithm for the Greatest Equilibrium State of Fuzzy Control Systems. J. of Fuzzy Systems and Mathematics 15(3), 80–83 (2001)..

- [3] Yongkun, L., Lijie, S and Li, Y., (2014), Existence and Exponential Stability of Equilibrium Point for Fuzzy BAM Neural Networks with Infinitely Distributed Delays and Impulses on Time Scales, Journal of Applied Mathematics, Article ID 721586.
- [4] Allahviranloo, T., Babakordi, F., (2017), Algebraic solution of fuzzy linear system as: $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}\tilde{X} = \tilde{Y}$, Soft Computing, 7463-7472.
- [5] Babakordi, F., (2020), A Novel Transformation Method for Solving Complex Interval Matrix, 12, 239-234.
- [6] Ghanbari, M., Allahviranloo, T., Pedrycz, W., (2020), On the rectangular fuzzy complex linear systems, 91, 106-196.
- [7] Mosleh , M, Otadi, M., Abbasbandy, S., (2011), Solution of Fully Fuzzy Linear Systems by ST Method, Journal of applied Mathematics, 28, 23-31.
- [8] Younbae, J., (2021), Relaxation Technique For Solving Fuzzy Linear Systems Of Linear Fuzzy Real Numbers, J. Math. Comput. Sci. 11, 8211-8220.
- [9] StephenDinagar, D., HetcetylSangeethaPriyam, A., (2021), Solving LinearSystem Of Equations With Fuzzy Revised Decomposition Method, Advances and Applications in Mathematical Sciences, 20, 931-99954.
- [10] Abdollahzadeh, R., ModarreseKhiabani, F., Iranzadeh, S., (2021) A Model for Evaluating the Financial Performance of Islamic Azad Universities using the Combination of ANFIS and PSO, Journal of applied Mathematics , 18, 39-56.
- [11] Babakordi, F., Allahviranloo, T., (2021), A New Method for Solving Fuzzy Bernoulli Differential Equation, Journal Of Mathematical Extension, 15, 1-20.
- [12] Ma, M., Friedman, M., Kandel, A., (2000), Duality in fuzzy linear systems, Fuzzy Sets Syst. 109, 55–58.
- [13] Abbasbandy, S., Otadi, M., Mosleh, M., (2008), Minimal solution of general dual fuzzy linear systems, Chaos, Solitons and Fractals, 37, 1113-1124.
- [14] Otadi, M., (2013), A New Method for Solving General Dual Fuzzy Linear Systems, Journal of Mathematical Extension, 7, 63-75.
- [15] Babakordi, F., Adabitabarfirozja, M., (2020), Solving fully fuzzy matrix dual system with optimization problem, International Journal of Industrial Mathematics, 12, 11pages.
- [16] Ghanbari, M., Allahviranloo, T., Pedrycz, W., (2021), A straightforward approach for solving dual fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Systems, 10.1016/j.fss.2021.04.007.
- [17] Jian-bing Gao, Si-zong Guo, (2010), A Solving Method of Fuzzy Linear System's Equilibrium Point, conference paper, Fuzzy Information and Engineering, 189-197.
- [18] Melliani, S., El Allaoui, A., Chadli, L. S., (2016), Complex fuzzy dynamical systems and Stability of the equilibrium Point, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, 3, 223-233.
- [19] Khabiri, B., Naseri, S.H., Abdi, M., (2010). Determination of the market equilibrium value using the solution of the fuzzy linear equation system. Journal of Applied Mathematics, Lahijan Branch, 2 (25), 69-77.
- [20] Allahviranloo, T., Salahshour, S., Khezerloo, M., (2011). Maximal- and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems. Journal of Computational and Applied Mathematics 235, 4652–4662.
- [21] Allahviranloo, T., Salahshour, S., Homayoun-nejad, M., Baleanu, D., (2013), General Solutions of Fully Fuzzy Linear Systems, Abstract and Applied Analysis, 10.1155/2013/593274.
- [22] Cong-Xin, W., Ming, M., (1991). Maximal- and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems. Embedding problem of fuzzy number space: Part I, Fuzzy Sets and Systems 44, 33-38.
- [23] Goetschel, R., Voxman, W., (1986), Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems. 18, 31-43.