مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیستم، شماره اول (پیاپی ۷۶)،بهار ۰۲، ص ص ۱۱-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ارایه روشی برای حل مسایل چندهدفه خطی بازه‌ای مبتنی بر رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی

حمید مرادی[۱*]، سید محمد علی خاتمی فیروزآبادی[۲]، سهیلا خدامی[۳]

۱- دکتری، مدیریت تحقیق در عملیات، دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

۲- استاد، گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

۳- دانشیار، گروه مدیریت بازرگانی، دانشکده مدیریت، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.

رسید مقاله: ۲۴ بهمن ۱۴۰۰
پذیرش مقاله: ۱۸ تیر ۱۴۰۱

چکیده

اکثر تحقیقات بر روی مسایل چندهدفه در شکل قطعی آن متمرکز شده‌اند که ضرایب و متغیرهای تصمیم‌گیری در توابع هدف و قیود، قطعی فرض شده‌اند. در واقع به‌دلیل وجود اطلاعات نادقیق و مبهم، شناخت دقیق مقادیر ضرایب و متغیرها مشکل است. حساب بازه‌ای برای توصیف و حل عدم‌قطعیت و عدم‌دقت در این مسایل تصمیم‌گیری مناسب است. یکی از روش‌های مهم پیشنهادشده برای حل مسایل چندهدفه بازه‌ای روش بهترین- بدترین پیشنهادشده توسط تانگ می‌باشد از اشکالات عمده این روش امکان ایجاد جواب‌های نشدنی می‌باشد. لذا این مقاله به توسعه یک روش برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای پرداخته است. رویکرد پیشنهادی در این مقاله استفاده از روش برنامه‌ریزی آرمانی برای حل این‌گونه مسایل است. در این مقاله الگوریتم جدیدی برای حل این‌گونه مسایل ارایه‌شده که علاوه بر کم کردن پیچیدگی‌های حل مسایل غیرقطعی به روش‌های فازی، از محاسبات زیاد حتی در صورت افزایش اهداف جلوگیری کرده است. کارایی روش ارایه‌شده در مثال‌های عددی مختلف آزمایش‌شده است. روش ارایه‌شده با در نظرگرفتن کران‌های محتمل برای اهداف و قیود از احتمال ایجاد جواب‌های نشدنی و در عین حال جواب‌های با فاصله کرانی زیاد که به نوعی غیرکاراست، کاسته است.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، اعداد بازه‌ای، برنامه‌ریزی آرمانی، عدم قطعیت.

۱ مقدمه

در شرایط واقعی، وضعیت‌هایی رخ می‌دهد که یک مدل ریاضی که تنها یک هدف دارد، بیانگر واقعیت و خواسته‌های مورد نظر تصمیم‌گیرنده نبوده که این امر، کارایی و مطلوبیت نتایج را کاهش می‌دهد. در عالم واقع، مسایل بسیاری را می‌توان یافت که تحت تاثیر چندهدف قرار می‌گیرند و بعید نیست که هدف هر قسمت با

*عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: moradi6598@gmail.com

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

اهداف قسمت‌های دیگر، متفاوت و گاه متضاد باشد [۱، ص ۱۷]. لذا در این گونه مسایل، بهینه شدن یک هدف، لزوماً به معنای بهینه شدن تمامی توابع هدف و مساله نیست. شیوه‌های متفاوتی برای حل این گونه مسایل پیشنهاد شده است که یکی از آنها برنامه‌ریزی آرمانی است. همان‌طور که از نام این روش پیداست، در برنامه‌ریزی آرمانی، تصمیم‌گیرنده، یک آرمان را برای هر هدف تعیین می‌کند و میزان انحراف توابع هدف از آرمان را حداقل می‌کند [۲، ص ۲۹].

روش‌های حل کلاسیک مسایل چندهدفه بر اساس فرض قطعی بودن متغیرها و ضرایب گسترش می‌یابند. در حقیقت، آنها گمان می‌کنند که تمام داده‌های مورد نیاز برای مدل‌سازی و حل یک مساله چند هدفه مشخص شده‌اند. اما در عمل، این فرض اغلب نقض می‌شود. عدم اطمینان می‌تواند به علت اطلاعات جزیی و یا تقریبی رخ دهد [۳، ص ۵۵]. چارچوب‌های مختلفی به منظور مدل‌سازی و تحلیل عدم اطمینان سیستم‌ها معرفی می‌شوند. لیو و لین چارچوب‌های عدم قطعیت را در زمینه‌های ذیل به صورت مجزا طبقه‌بندی کردند[۴، ص ۱۸۶]:

- احتمال و آمار؛
- نظریه مجموعه‌های فازی.
- تئوری سیستم خاکستری.
- حساب بازه‌ای.

ریشه‌ی عدم قطعیت موجود در مسایل را می‌توان در دو نوع عدم قطعیت نهفته دانست. اولین نوع عدم قطعیت، عدم قطعیت تصادفی است که ناشی از ماهیت تصادفی مساله است که با استفاده از آمار و احتمال و الگوها و توابع توزیع آماری توصیف می‌گردد. مطالعه این جنبه از پدیده‌ها مبتنی بر نمونه‌هایی با حجم زیاد و این فرض است که این نمونه‌ها از یک الگوی مشخص تحت عنوان توزیع احتمال پیروی می‌کنند. دومین نوع عدم قطعیت عدم قطعیت ادراکی است که ناشی از پیچیدگی ذاتی پدیده و کمبود اطلاعات کامل درمورد آن است. برای توصیف و مطالعه این جنبه از پدیده‌ها نظریه مجموعه‌های فازی، تئوری سیستم‌های خاکستری و حساب بازه‌ای توسعه یافته‌اند [۵].

نکته مهم در مدل‌سازی سیستم‌های غیرقطعی این است که همیشه یک مدل پیچیده برای مقابله با اطلاعات ناقص و داده‌های غیرقطعی ضروری نیست [۶، ص ۵۴۸-۵۵۸]. اعداد بازه‌ای چارچوبی است که برای جلوگیری از چنین پیچیدگی‌های غیرضروری کمک می‌کند. مور در ابتدا اعداد بازه‌ای را معرفی کرد [۷، ص ۲۶۴]. یک عدد بازه‌ای عددی است که مقدار دقیق آن ناشناخته است، اما دامنه‌ای که مقدار در آن نهفته است شناخته‌شده است [۸، ص ۹۹]. یک عدد بازه‌ای به تحلیلگر اجازه می‌دهد تا تقریب خود را در مورد پارامترها در یک فاصله به جای یک عدد واضح ارایه دهد. این انعطاف‌پذیری باعث شده است که اعداد بازه‌ای در مشکلات بهینه‌سازی کاربردهای خوبی داشته باشند.

بیشتر ادبیات مربوط به روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای مربوط به مسایل تک هدفه می‌باشد. در این ارتباط الله دادی و میش مست نهی [۹] با استفاده از الگوریتم روش گوی بسته سعی نموده‌اند که الگوریتم بهترین- بدترین را توسعه داده و از ایجاد جواب‌های نشدنی حاصل از این روش جلوگیری کنند. لازم به ذکر

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

است که مسایل چندهدفه نیز برای حل، به مساله تک هدفه تبدیل شده است. به عنوان مثال رضوی حاجی آقا و دیگران [۱۰، ص ۴۸۲-۴۹۶] به روش فازی مدل چندهدفه بازه‌ای را به مدل تک هدفه تبدیل نمودند؛ البته ایرادات روش ایشان در مقاله محمودی و دیگران بیان شده است [۱۱]. پس از تبدیل مدل چندهدفه به تک هدفه در این بین برخی دو مدل برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی تحت عدم قطعیت ارایه نموده‌اند. برخی از آن‌ها حساب بازه‌ای و بسط روش سیمپلکس را مورد استفاده قرار داده‌اند[۱۲-۱۵]. بعضی از نویسندگان روی پایداری پایه تمرکز نموده‌اند، تحت فرض پایداری پایه، مجموعه جواب تعیین می‌شود. [۱۶-۲۰]. برخی نیز دو زیر مدل برای تعیین مجموعه جواب معرفی کرده‌اند[۲۱-۲۷]. در روش حالات بهترین- بدترین که توسط تانگ پیشنهاد شده است، مدل به دو زیر مدل تبدیل می‌شود، مدل‌های بهترین و بدترین به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین نواحی شدنی را دارند [۲۳، ص ۳۰۱-۳۰۶]. روش بهترین- بدترین توسط چاینک و رمدان [۲۸، ۲۰۹-۲۲۰] برای حالتی که مدل شامل قیود تساوی باشد، توسعه داده شده است. هوانگ و مور یک روش جدیدتر برای روش چاینک و رمدان پیشنهاد نمودند. [۲۲]. جواب‌های حاصل از روش‌های بهترین- بدترین در برخی مثال‌ها منجر به ناحیه نشدنی می‌شود. این روش کران‌های واقعی تابع هدف را به دست می‌آورد؛ اما جواب‌های حاصل کاملا شدنی نیستند. برای تضمین شدنی بودن جواب، روش برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای اصلاح‌شده توسط ژو و همکاران [۲۵، ص ۱۵۹-۱۷۲] و روش دو گامی بهبودیافته توسط وانگ و همکاران[۲۴، ص ۸۵-۹۶] پیشنهاد شده است.

اکثر روش‌های فوق به دلیل تبدیل مدل‌های بازه‌ای به چندین مدل، محاسبات قابل توجهی داشته و عدم کارایی محاسباتی وقتی تعداد توابع هدف افزایش می‌یابد بیشتر می‌شود. در این بین استفاده از روش بهترین- بدترین همان‌گونه که توضیح داده شده ممکن است به جواب‌های نشدنی منجرشده و حتی در صورت به دست آمدن جواب به علت فاصله زیاد کران‌های جواب به جواب غیرکارا منجر شود.

در این مقاله، یک چارچوب جدید برای حل مسایل چندهدفه بازه‌ای خطی با در نظر گرفتن متغیرها و پارامترهای غیر قطعی ارایه شده است. روش پیشنهادی از منطق برنامه‌ریزی آرمانی برای حل مدل استفاده نموده است. استفاده از روش پیشنهادی در یک مرحله اهداف و قیود غیر قطعی را قطعی کرده و از محاسبات زیاد حتی در صورت افزایش اهداف جلوگیری کرده است. همچنین با در نظرگرفتن کران‌های محتمل برای اهداف و قیود از احتمال ایجاد جواب‌های نشدنی و در عین حال جواب‌های با فاصله کرانی زیاد که به نوعی غیرکاراست، کاسته است.

۲ برنامه‌ریزی چندهدفه خطی بازه‌ای

یک مساله برنامه ریزی چند هدفه خطی بازه ای به شرح زیر است:

$$Max(Min) \otimes Z_l = \sum_{j=1}^{n} \otimes c_{lj} \otimes x_j, \qquad l = 1,2,\dots,k \tag{1}$$

$s.t.$

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

$$\sum_{j=1}^{n} \otimes a_{ij} \otimes x_j \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} \otimes b_i, \qquad i=1,2,\dots,m$$
$$\otimes x_j \geq 0, \qquad j=1,2,\dots,n$$

که در آن

$\otimes x_j \in [\underline{x}_j, \overline{x}_j],\ j=1,2,\dots,n$ متغیر بازه‌ای،

$\otimes c_{lj} \in [\underline{c}_{lj}, \overline{c}_{lj}],\ l=1,2,\dots,k,\ j=1,2,\dots,n$ ضرایب توابع هدف بازه‌ای،

$\otimes a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}],\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n$ ضرایب محدودیت‌های بازه‌ای

و $\otimes b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i],\ i=1,2,\dots,m$ مقدار سمت راست بازه‌ای می‌باشند [۲۹].

لازم به ذکر که علامت ضربدر در داخل دایره که در جلوی متغیر و یا عدد قرارگرفته است نشان‌دهنده متغیر یا عدد بازه‌ای است. در این تحقیق برای نشان دادن کران پایین اعداد بازه‌ای از یک خط زیرمتغیر و برای نشان دادن کران بالا اعداد بازه‌ای از یک خط بالای متغیر استفاده می گردد.

۳ برنامه‌ریزی آرمانی

برنامه‌ریزی آرمانی یکی از مهم‌ترین مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه است و از جمله مدل‌های اساسی است که تصمیم‌گیرنده هم‌زمان درصدد دستیابی به آرمان‌هایی برای چندین هدف می‌باشد. مسایل برنامه‌ریزی آرمانی مانند سایر مسایل می‌توانند به صورت خطی، غیرخطی و یا اعداد صحیح فرموله‌شده؛ انواع مختلفی را از خانواده مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی ارایه نمایند. فرم کلی مدل برنامه‌ریزی آرمانی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & Min \quad z=\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{m} p_k\left(d_i^- + d_i^+\right) \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i, \qquad i=1,2,\dots,m, \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j \leq b_r, \qquad r=0,1,2,\dots,s, \\ & \qquad x_j, d_i^+, d_i^- \geq 0, \qquad i=1,2,\dots,m, \qquad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{۲}$$

که در این مدل:

x_j : بیانگر متغیرهای تصمیم مدل بوده که می‌تواند هر عدد حقیقی غیرمنفی را اختیار کند.

d_i^+ و d_i^- : متغیرهای انحراف مثبت و منفی از آرمان i ام را نشان می‌دهد.

b_i : عدد سمت راست یا سطح تمایل آرمان i ام را بیان می‌دارد.

P_k : اولویت k ام $(k=1,2,\dots,q)$ آرمان را مشخص می کند.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

a_{rj}: ضرایب فنی مدل را ارایه می‌کند.

C_{ij} : ضرایب متغیرهای تصمیم jام در آرمان i را نشان می‌دهد.

b_r : اعدد سمت راست محدودیت‌های کارکردی.

این مدل دارای n متغیر تصمیم، m آرمان، k اولویت و S محدودیت کارکردی می‌باشد. روابط ریاضی موجود در مدل خطی و از درجه یک است [۳۰].

٤ رویکرد پیشنهادی برنامه‌ریزی آرمانی برای حل مساله برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای

پژوهش حاضر از رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی استفاده کرده است؛ زیرا رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی یکی از روش‌های مهم تبدیل اهداف چندهدفه به تک هدفه بوده که در ادبیات موضوع تصمیم‌گیری چندهدفه معرفی شده است. در حوزه عدم قطعیت برنامه‌ریزی آرمانی موجب می‌شود که اهداف به صورت همزمان کنترل شوند و استفاده از این روش برای مدل‌سازی موجب‌شده که بین اهداف بیشینه‌سازی، کمینه‌سازی و دستیابی به حدود مطلوب تعادل و انعطاف‌پذیری ایجاد شود.

لذا روش پیشنهادی شامل چندمرحله به صورت زیر است.

مرحله اول: قطعی نمودن محدودیت‌ها

الف- اگر طرف چپ هر محدودیت به صورت رابطه (۳) در نظر گرفته شود

$$\otimes LHS_i = \sum_{j=1}^{n} \otimes a_{ij} \otimes x_j , i = 1,2,...,m \qquad (۳)$$

که در آن $\otimes a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}], i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n$ ضریب و $\otimes x_j \in [\underline{x}_j, \overline{x}_j], j = 1,2,...,n$ متغیر باشد به شرط آن‌که $\underline{x}_j, \overline{x}_j \geq 0$ آنگاه طرف چپ هر محدودیت به صورت متغیر بازه‌ای (۴) تعیین می‌شود.

$$\otimes LHS_i = [\sum_{j\in k^+} \underline{a}_{ij}\underline{x}_j + \sum_{j\in k^-} \underline{a}_{ij}\overline{x}_j + \sum_{j\in k^0} \underline{a}_{ij}\overline{x}_j , \sum_{j\in k^+} \overline{a}_{ij}\overline{x}_j + \sum_{j\in k^-} \overline{a}_{ij}\underline{x}_j + \sum_{j\in k^0} \overline{a}_{ij}\overline{x}_j], i = 1,2,...,m \qquad (۴)$$

که در آن $\boldsymbol{k^+}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا و پایین ضرایب آنها مثبت، $\boldsymbol{k^-}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا و پایین ضرایب آنها منفی و $\boldsymbol{k^0}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا ضرایب آنها مثبت و حد پایین ضرایب آنها منفی است.

لازم به ذکر است که برای رسیدن از رابطه (۳) به (۴) از مقاله رضوی حاجی آقا و همکاران (۲۰۱۳) الهام گرفته شده است [۱۰]. البته در این زمینه ایرادات مقاله ایشان رفع شده است.

ب- پس از مشخص نمودن طرف چپ هر محدودیت به صورت یک متغیر بازه‌ای، محدودیت‌ها برای $i = 1,2,...,m$ و $j = 1,2,...,n$ به صورت ذیل قطعی می‌شوند. لازم به ذکر است به علت آنکه تمام متغیرهای جواب در بازه درست محدودیت‌ها قرار گیرد از رویکرد پایدار در قطعی نمودن محدودیت‌ها استفاده شده است:

$$\otimes LHS_i = \otimes b_i \quad \Rightarrow \quad \underline{LHS_i} = \underline{b_i} \ , \ \overline{LHS}_i = \overline{b}_i$$
$$\otimes LHS_i \leq \otimes b_i \quad \Rightarrow \quad \overline{LHS}_i \leq \underline{b_i}$$

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

$$\otimes LHS_i \geq \otimes b_i \quad \Rightarrow \quad \underline{LHS_i} \geq \overline{b}_i$$
$$\otimes LHS_i < \otimes b_i \quad \Rightarrow \quad \overline{LHS_i} < \underline{b_i}$$
$$\otimes LHS_i > \otimes b_i \quad \Rightarrow \quad \underline{LHS_i} > \overline{b}_i$$
$$\otimes x_j \geq 0 \;\Rightarrow\; \underline{x}_j \geq 0\,,\;\; \overline{x}_j \geq 0$$

پ- با توجه به آنکه کران پایین هر متغیر بازه‌ای از کران بالای آن کوچک‌تر و یا مساوی است؛ بنابراین محدودیت‌های $\underline{x}_j \leq \overline{x}_j$ برای $j=1,2,...,n$ به محدودیت‌های تحقیق اضافه می گردد. به منظور خلاصه‌نویسی از این پس کلیه محدودیت‌های قطعی‌شده تحقیق با A نشان داده می‌شود.

مرحله دوم : تعیین آرمان‌های هر هدف

الف- اگر هدف به صورت ماکزیمم باشد، برای هر هدف $l=1,2,...,k$ آرمان هدف که با Z_l^* نشان داده می‌شود، از حل مدل تک هدفه (۵) با در نظر گرفتن محدودیت‌های قطعی شده مرحله قبل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &Max \quad \overline{Z}_l = \sum_{j\in k^+} \overline{c}_{lj}\,\overline{x}_j + \sum_{j\in k^-} \overline{c}_{lj}\,\underline{x}_j + \sum_{j\in k^0} \overline{c}_{lj}\,\overline{x}_j \\ &s.t. \\ &\quad A. \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $\boldsymbol{k^+}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا و پایین ضرایب آنها مثبت، $\boldsymbol{k^-}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا و پایین ضرایب آنها منفی و $\boldsymbol{k^0}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا ضرایب آنها مثبت و حد پایین ضرایب آنها منفی است.

ب- اگر هدف به صورت مینیمم باشد، برای هر هدف $l=1,2,...,k$ آرمان هدف که با Z_l^* نشان داده می‌شود، از حل مدل تک هدفه (۶) با در نظر گرفتن محدودیت‌های قطعی‌شده مرحله قبل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &Min \quad \overline{Z}_l = \sum_{j\in k^+} \underline{c}_{lj}\,\underline{x}_j + \sum_{j\in k^-} \underline{c}_{lj}\,\overline{x}_j + \sum_{j\in k^0} \underline{c}_{lj}\,\overline{x}_j \\ &s.t. \\ &\quad A. \end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن $\boldsymbol{k^+}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا و پایین ضرایب آنها مثبت، $\boldsymbol{k^-}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا و پایین ضرایب آنها منفی و $\boldsymbol{k^0}$ شامل متغیرهایی است که حد بالا ضرایب آنها مثبت و حد پایین ضرایب آنها منفی است.

مرحله سوم : جایگزینی هر هدف با اهداف آرمانی

الف-اگر هدف به صورت ماکزیمم باشد، برای $l=1,2,...,k$ هدف $Max \otimes Z_l = \sum_{j=1}^{n} \otimes c_{lj} \otimes x_j$ با هدف $Min \otimes d_l^-$ که در آن $\otimes d_l^-$ انحراف منفی (رو به پایین) از آرمان Z_l^* می‌باشد که در آن

$$\underline{d_l^-} = Z_l^* - \overline{Z}_l$$
$$\overline{d_l^-} = Z_l^* - \underline{Z_l}$$

با توجه به این که $\overline{Z}_l \leq Z_l^*$ و $\underline{Z_l} \leq Z_l^*$، لذا همواره:

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

$$\underline{d_l^-}\ ,\overline{d_l^-} \geq 0$$

ب- اگر هدف به صورت مینیمم باشد، برای $l=1,2,...,k$ هدف $Min \otimes Z_l = \sum_{j=1}^{n} \otimes c_{lj} \otimes x_j$ با هدف $Min \otimes d_l^+$ که در آن $\otimes d_l^+$انحراف مثبت (رو به بالا) از آرمان Z_l^* می‌باشد که در آن

$$\underline{d_l^+} = \underline{Z_l} - Z_l^*$$
$$\overline{d_l^+} = \overline{Z_l} - Z_l^*$$

با توجه به این‌که $\overline{Z_l} \geq Z_l^*$ و $\underline{Z_l} \geq Z_l^*$ لذا همواره:

$$\underline{d_l^+}\ ,\ \overline{d_l^+} \geq 0$$

مرحله چهارم : قطعی نمودن اهداف

اهداف برای $l=1,2,...,k$ به صورت ذیل قطعی می‌شوند:

$$Min \otimes d_l^- \Rightarrow Min \quad \underline{d_l^-}, Min \quad \overline{d_l^-}$$
$$Min \otimes d_l^+ \Rightarrow Min \quad \underline{d_l^+}, Min \quad \overline{d_l^+}$$

مرحله پنجم: حل مدل

الف- اهداف قطعی به صورت ذیل به مدل تک هدفه تبدیل می‌شود:

$$Min \quad Z = \sum_{l \in h^+} w_l (\underline{d_l^-} + \overline{d_l^-}) + \sum_{l \in h^-} w_l (\underline{d_l^+} + \overline{d_l^+}) \qquad (7)$$

که در آن h^+ شامل اهدافی است که می‌بایست ماکزیمم شوند و h^- شامل اهدافی است که می‌بایست مینیمم شوند. همچنین w_lها برای $l=1,2,...,k$ وزن اهداف می‌باشد.

ب- با توجه به استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی، برای $l=1,2,...,k$ محدودیت‌های زیر به محدودیت‌های تحقیق اضافه می گردد:

-برای اهدافی که می‌باید ماکزیمم گردند یعنی $l \in h^+$

$$\overline{Z_l} + \underline{d_l^-} = Z_l^*$$
$$\underline{Z_l} + \overline{d_l^-} = Z_l^*$$

-برای اهدافی که می باید مینیمم گردند یعنی $l \in h^-$

$$\overline{Z_l} - \overline{d_l^+} = Z_l^*$$
$$\underline{Z_l} - \underline{d_l^+} = Z_l^*$$

پ-مدل تک هدفه قطعی با محدودیت‌های غیرقطعی ذیل به روش سیمپلکس حل می‌شود:

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

$$Min \quad Z=\sum_{l\in h^+} w_l(\underline{d_l^-}+\overline{d_l^-})+\sum_{l\in h^-} w_l(\underline{d_l^+}+\overline{d_l^+})$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}&\overline{Z}_l+\underline{d_l^-}=Z_l^* \quad ,l\in \mathrm{h}^+\\&\underline{Z}_l+\overline{\overline{d_l^-}}=Z_l^* \quad ,l\in \mathrm{h}^+\\&\overline{Z}_l-\overline{d_l^+}=Z_l^*\ ,l\in \mathrm{h}^-\\&\underline{Z}_l-\underline{d_l^+}=Z_l^*\ ,l\in \mathrm{h}^-\\&A\end{aligned} \qquad (۸)$$

۵ مثال عددی

مثال۱- مساله برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای خطی زیر را که توسط رضوی حاجی‌آقا و همکاران ارایه‌شده در نظر بگیرید [۱۰]:

$$\begin{aligned}&Max \quad Z_۱=[۱,۳]\otimes x_۱+[-۱,۱/۵]\otimes x_۲\\&Max \quad Z_۲=[۰/۵,۲]\otimes x_۱+[-۱/۵,-۱]\otimes x_۲\\&s.t.\\&[۱,۲]\otimes x_۱+[۱/۵,۳]\otimes x_۲\le[۴,۶]\\&[۱,۳]\otimes x_۱+[۲/۵,۳/۵]\otimes x_۲\le ۱۲\\&\otimes x_۱,\otimes x_۲\ge ۰\end{aligned}$$

جواب به‌دست آمده حاصل از حل مدل به روش ارایه‌شده در این مقاله با جواب به‌دست آمده از روش رضوی حاجی آقا و همکاران یکسان و برابر مقادیر زیر است:

$$\otimes x_۱=[۳,۳]\ ,\ \otimes x_۲=[۰,۰]\ ,\ \otimes Z_۱=[۳,۹]\ ,\ \otimes Z_۲=[۱/۵,۶]$$

درحالی‌که محاسبات انجام‌شده در روش ارایه‌شده در این مقاله نسبت به روش رضوی‌حاجی آقا و همکاران کمتر است. زیرا ایشان برای حل مسایل چندهدفه از روش فازی استفاده کرده؛ لذا برای هر هدف توابع عضویت فازی را تشکیل داده که این موضوع منجر به پیچیدگی و محاسبات بیشتر به منظور تعیین توابع عضویت فازی‌شده است.

مثال۲- مساله برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای خطی زیر را که توسط الیویرا و آنتونس ارایه‌شده در نظر بگیرید [۳۱]:

$$\begin{aligned}&Max \quad Z_۱=[۰/۵,۱/۸]\otimes x_۱+[-۰/۵,۰/۵]\otimes x_۲\\&Max \quad Z_۲=[۰/۳,۰/۸]\otimes x_۱+[۱,۱/۲]\otimes x_۲\\&s.t.\\&[۱/۵,۲/۵]\otimes x_۱+[۰/۵,۱]\otimes x_۲\le[۶,۱۰]\\&[۰/۵,۰/۲]\otimes x_۱+[۳,۶]\otimes x_۲\le[۱۴,۱۶]\\&\otimes x_۱,\otimes x_۲\ge ۰\end{aligned}$$

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

جواب به‌دست آمده حاصل از حل مدل به روش ارایه‌شده در این مقاله با جواب به‌دست آمده از روش الیویرا و آنتونس در جدول ۱ مقایسه شده است:

جدول ۱. پارامترهای محاسبه شده در دو مقطع

	$\otimes x_1$	$\otimes x_2$	$\otimes Z_1$	$\otimes Z_2$
نتایج روش ارایه‌شده در مقاله	[۳/۳۸۵, ۳/۳۸۵]	[۱/۵۳۸, ۱/۵۳۸]	[۰/۹۲۳, ۶/۸۶۲]	[۲/۵۵۴, ۴/۵۵۴]
نتایج به روش الیویرا و آنتونس	[۳/۱۶۶, ۳/۱۶۶]	[۱/۱۸۸, ۱/۱۸۸]	[۰/۹۸۹, ۶/۲۹۲]	[۲/۱۳۸, ۳/۹۵۸]

به منظور مقایسه جواب‌ها از پژوهش درویشی و همکاران کمک گرفته شده است. در این پژوهش با بررسی نحوه رتبه‌بندی اعداد بازه‌ای توسط محققان مختلف، در نهایت رویکرد هسته و درجه خاکستری بودن عدد بازه‌ای، نسبت به روش‌های دیگر مناسب‌تر تشخیص داده شده است [۳۲]. لذا در این تحقیق نیز برای مقایسه جواب‌ها از این روش استفاده شده است.

لذا همان‌طور که از جدول ۱ مشخص است جواب ارایه‌شده توسط مدل تحقیق نسبت به جواب ارایه‌شده توسط مدل الیویرا و آنتونس برتری دارد. چون اهداف به صورت ماکزیمم بوده است در مقایسه جواب تابع هدف اول مشخص شده است که هسته جواب بازه‌ای به روش تحقیق از هسته جواب بازه‌ای به روش الیویرا و آنتونس بزرگ‌تر است. همچنین در مقایسه جواب تابع هدف دوم نیز مشخص شده است که هسته جواب بازه‌ای به روش تحقیق از هسته جواب بازه‌ای به روش الیویرا و آنتونس بزرگ‌تر است و چون هسته جواب‌ها بزرگ‌تر است دیگر نیازی به بررسی درجه خاکستری بودن نیست؛ در نتیجه از روش تحقیق حاضر جواب‌های بهتری به دست آمده است.

۶ نتیجه‌گیری

عدم اطمینان یک ویژگی اجتناب‌ناپذیر از مدل‌سازی ریاضی سیستم‌های کاربردی است. اغلب کاربر اطلاعات کافی برای تعیین مقدار دقیق برای مقادیر موردنیاز در یک مدل را ندارد. در این حالت، کاربر مجبور است این پارامترها را تخمین بزند. اعداد بازه‌ای چارچوبی برای بیان اطلاعات در شرایط عدم قطعیت به صورت بازه‌ای از اعداد ارایه می‌دهند. این چارچوب انعطاف‌پذیری زیادی در مدل‌سازی سیستم‌های نامشخص دارد. در این مقاله، پارامترها یا ضرایب و متغیرها به صورت بازه‌ای در نظر گرفته شده است. روش پیشنهادی، رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی برای حل مسایل چندهدفه بازه‌ای خطی را ارایه و با استفاده از این روش اهداف و محدودیت‌ها غیرقطعی‌شده و سپس مدل به روش برنامه‌ریزی آرمانی حل شده است.

در روش حل ارایه‌شده به علت در نظر گرفتن کران‌های بالا و پایین به صورت توام در محدودیت‌های تحقیق، نسبت به روش بهترین- بدترین ارایه‌شده توسط تانگ [۲۳] که دو مدل را به صورت مجزا حل می‌کند محاسبات کمتری دارد. روش حل ارایه‌شده با رفع ایرادات روش رضوی حاجی آقا و همکاران [۱۰] به علت استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی و متعاقبا عدم نیاز به استفاده از توابع عضویت فازی، محاسبات کمتری نسبت به روش مذکور

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

داشته و در عین حال با در نظر گرفتن کران‌های بالا و پایین به صورت توام و مبتنی بر رویکرد پایدار در محدودیت‌های تحقیق نسبت به روش‌های قبل امکان ایجاد جواب‌های کارای بهتر را دارد. همچنین با درنظرگرفتن رتبه‌بندی اعداد بازه‌ای مشخص شده است که جواب‌های حاصل از مدل تحقیق از جواب‌های روش الیویرا و آنتونس بهتر بوده است.

منابع

[1]Mohammadi, A., Hosseinzadeh, M., Bagherzadeh Azar, M., (2011). Provide an integrated model of fuzzy hierarchical analysis, gray relational analysis and multi-objective planning to select a business partner. Industrial Management Perspective, 1.

[2] Hwang, Ching-Lai & Masud, Abu syed Md., (1978). Multi Objective Decision Making Methods and Applications. Springer – Verlog.

[3] Yovits, M.C., (1984). Advances in Computers. Vol. 23, Academic Press, Orlando, FL.

[4] Liu, S. and Lin, Y., (2006). Grey Information: Theory and Practical Applications. Springer, London.

[5] Mehregan, M. R., & Dabbaghi, A., (2014). Develop a comprehensive method for making indefinite multi-criteria decision making based on gray relational analysis. Public Management Research, 7.

[6] Liu, S., Sheng, K. and Forrest, J., (2012). On uncertain systems and uncertain models", Kybernetes, Vol. 41 Nos 5/6, pp. 548-558.

[7] Moore, R.E., (1966). Interval Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[8] Moore, R.E., Kearfott, R.B. and Cloud, M.J., (2009). Introduction to Interval Analysis. SIAM Press, Philadelphia, PA.

[9]Allah Dadi, M., & Mish Mast Nahi, H., (2017). New answer area to solve the interval linear programming model. Operations research in its applications, (53) 2.

[10] Razavi Hajiagha, S. H., Amoozad Mahdiraji, H., & Sadat Hashemi. S., (2013). A multi-objective programming approach to solve grey linear programming. Kybernetes, 42 (3), 482-496.

[11] Mahmoudi, A., Feylizadeh, M. R., Darvishi, D., (2017). A note on "a multi-objective programming approach to solve grey linear programming". Grey Systems: Theory and Application, 8(1), 35-45.

[12] Beeck, H., (1978). Linear programming with inexact data. Munich: Technical report TUM-ISU-7830, Technical University of Munich.

[13] Jansson, C., (1988). A self-validating method for solving linear programming problems with interval input data. Computing Suppl, 6, 33-45.

[14] Jansson, C., Rump, S. M., (1991). Rigorous solution of linear programming problems with uncertain data", Z. Oper. Res., 35(2), 87-111.

[15] Machost, B., (1970). Numerische Behandlung des Simplex verfahrens mit interval lanalytischen Methoden. Tech. Rep. 30, Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 54 pages, Bonn.

[16] Hladik, M., (2014). How to determine basis stability in interval linear programming. Optim. Lett., 8, 375-389.

[17] Konickova, J., (2001). Sufficient condition of basis stability of an interval linear programming problem. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech., 81(3), 677-678.

[18] Mraz, F., (1996). On infimum of optimal objective function values in interval linear programming. Technical report KAM Series, Department of Applied Mathematics, Charles University, Prague, 96-337

[19] Rohn, J., (1993). Stability of the optimal basis of a linear program under uncertainty. Oper. Res. Lett., 13(1), 9–12.

[20] Rex, J., Rohn, J., (1998). Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 20(2), 437-445.

[21] Huang, G. H., Baetz, B. W., Patry, G. G., (1995). Grey integer programming: an application to waste management planning under uncertainty. Eur. J. Oper. Res., 83, 594-620.

[22] Huang, G. H., Moore, R. D., (1993) .Grey linear programming, its solving approach, and its application. International Journal of Systems Science, 24, 159-172.

[23] Tong, S. C., (1994). Interval number, fuzzy number linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 66, 301-306.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]

[24] Wang, X., Huang, G., (2014). Violation analysis on two-step method for interval linear programming. Information Sciences, 281, 85-96.
[25] Zhou, F., Huang, G. H., Chen, G., Guo, H., (2009). Enhanced-interval linear programming", European Journal of Operational Research, 199, 323-333.
[26] Allahdadi, M., Mishmast Nehi, H., Ashayerinasab, H. A., Javanmard, M., (2016). Improving the modified interval linear programming method by new techniques. Information Sciences, 339, 224-236.
[27] Allahdadi, M., Mishmast Nehi, H., (2013). The optimal solutions set of the interval linear programming problems. Optimization Letters, 7, 893-1911.
[28] Chinneck, J. W., Ramadan, K., (200). Linear programming with interval coefficients. Journal of the Operational Research Society, 51, 209-220.
[29] Naseri, S. Hadi., & Khabiri, B., (2019). A gray transport problem in a fuzzy environment. Operations research in its applications, (62) 3.
[30]Mehregan, Mohammad Reza (2007). Multi-objective decision models. Tehran, University of Tehran Press, School of Management.
[31] Oliveira, C. and Antunes, C.H., (2007). Multiple objective linear programming models with interval coefficients – an illustrated overview. European Journal of Operational Research,181 (3), 1434-1463.
[32] Darvishi, D., Forrest, J., Liu, S., (2019). A comparative analysis of grey ranking approaches. Grey Systems: Theory and Application, 9(4), 472-487.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.1.1]