مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال نوزدهم، شماره دوم (پیاپی ۷۳)، تابستان ۰۱، ص ص ۱۱۱-۹۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تعیین اوزان در فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه

ظاهر سپهریان[۱]، سحر خوش فطرت[۲*]، سعید عبادی[۳]
۱-دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
۲- استادیار، گروه ریاضی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
۳-استادیار، گروه ریاضی، واحد اردبیل، دانشگاه آزاد اسلامی، اردبیل، ایران

رسید مقاله: ۲۰ شهریور ۱۳۹۹
پذیرش مقاله: ۹ اردیبهشت ۱۴۰۰

چکیده
چگونگی به‌دست آوردن یک بردار اولویت از یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو، موضوع مهمی در فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP) بوده است و در مقالات AHP به طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، تحقیقاتی در زمینه‌ی استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) برای ایجاد وزن‌های محلی گزینه‌ها در AHP انجام‌شده است. این مقاله برای تعیین اولویت در AHP، یک رویکرد تحلیل مرز دوگانه را پیشنهاد می‌کند. در رویکرد تحلیل مرز دوگانه، از دو مدل خاص DEA برای به‌دست آوردن بهترین اولویت‌های محلی از یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو یا گروهی از ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دو، صرف‌نظر از این‌که کاملاً سازگار یا ناسازگارباشند، استفاده می‌شود. رویکرد پیشنهادی، برای ماتریس‌های مقایسه‌ای دو به دو سازگار، وزن‌های حقیقی می‌دهد و برای حالت ناسازگار این ماتریس‌ها، وزن‌های فراگیر منطقی ارایه می‌دهد. مثال عددی برای نشان دادن مزایای تکنیک معرفی‌شده آورده شده است. در نهایت یک مثال واقعی برای شرح روش پیشنهادی ارایه شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی، تحلیل مرز دوگانه، تصمیم‌گیری چندشاخصی.

۱ مقدمه
فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP) یک روش تصمیم‌گیری چندمعیاره است که در عرصه‌های مختلفی به‌صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است [۱]. ایشیزاکا و لبیب [۲] در مقاله‌ی مروری خود در خصوص تحولات اصلی درباره‌ی AHP بیان کرده‌اند، بر اساس تحقیقات آن‌ها ، قدیمی‌ترین منبع که به این مبحث اشاره کرده است، توسط ساعتی به سال ۱۹۷۲ برمی‌گردد [۳]. کاربرد این روش، به علت سهولت آن، از زمان پیدایش تا کنون مدام در حال افزایش بوده است. پژوهش‌های زیادی درباره‌ی کاربردهای AHP در رشته‌های مختلف انجام

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: saharkhoshfetrat@iaut.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

شده است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: توسعه‌ی پایدار و انرژی تجدیدپذیر [۵-۴]، مدیریت منابع آب [۷-۶]، کشاورزی [۸]، سلامت [۹]، انرژی هسته‌ای[۱۰]، تغییرات آب‌وهوا [۱۱]، انتخابات ریاست‌جمهوری [۱۲] و غیره. AHP متکی بر سه اصل است: تجزیه، قضاوت‌های تطبیقی، و تعیین اولویت‌ها [۱۳]، و این اصول را با اجرای مراحل زیر می‌توان محقق کرد: مدل‌سازی یا ساختاردهی مساله‌ی تصمیم‌گیری، ارزش‌گذاری و تجمیع وزن‌ها، و تحلیل حساسیت [۲].

برای مرحله‌ی مدل‌سازی مساله‌ی تصمیم‌گیری، AHP پتانسیلی قوی در ساختار دادن مساله‌ی تصمیم‌گیری به‌صورت ساختار سلسله‌مراتبی دارد. در حالت کلی، ساختار سلسله‌مراتبی به‌صورت یک درخت است که ریشه‌ی آن نشان‌دهنده‌ی هدف کلی است و گره‌های آن که از هدف منشعب می‌شوند، نشان‌دهنده‌ی معیارها هستند. معیارها ممکن است به معیارهای ارزش‌یابی دیگری منشعب شوند که در سطوح میانی ساختار یافت می‌شوند. تعداد سطوح معیار اصلی و معیارهای ارزش‌یابی بستگی به پیچیدگی مساله‌ی تصمیم دارد. آخرین سطح ساختار به مجموعه‌ای از گزینه‌ها اختصاص می‌یابد. این روش تجزیه‌ی مساله‌ی تصمیم‌گیری، به تصمیم گیرندگان امکان می‌دهد که گزینه‌ها را در سطوح مختلف کلیت بر حسب زیرمجموعه‌های واحد معیار/معیارهای ارزش‌یابی تحلیل کنند [۱۴]. AHP در هر گره ساختار از مقایسه‌های دو به دو استفاده می‌کند، و امکان سازگاری و وارسی متقابل را در مقایسه‌های دو به دوی متفاوت با استفاده از یک مقیاس نسبت فراهم می‌کند [۱۵]. مقایسه‌ی دو به دو در کاهش تأثیر دیدگاه‌های ذهنی مربوط به تعیین مستقیم وزن‌ها مؤثر است [۱۶]. در AHP، می‌توان معیارها و گزینه‌های کمی و نیز کیفی را در مقیاس ترجیح یکسان نه سطحی مورد ارزیابی قرار داد، که در آن مقایسه‌های گفتاری باید به مقادیر عددی تبدیل شود [۱۷]. به دست آوردن اولویت‌ها در AHP نیازمند محاسبه‌ی مقدار ویژه‌ی بیشینه، شاخص سازگاری (CI)، نسبت سازگاری (CR)، و مقادیر نرمال‌سازی شده‌ی هر معیار/گزینه است، و اگر پیامدهای قبلی رضایت‌بخش باشد، تصمیم را می‌توان بر اساس مقادیر نرمال‌سازی شده اتخاذ کرد؛ در غیر این صورت، این روال تکرار می‌شود تا آنکه مقادیر در دامنه‌ی مورد نظر واقع شود [۱۸]. درست‌آزمایی سازگاری در AHP، که یکی از نقاط قوت اصلی AHP تلقی می‌شود و از آن برای ارزیابی درجه‌ی سازگاری میان مقایسه‌های دو به دو استفاده می‌شود، اهمیت حیاتی دارد، زیرا مانند یک بازخورد برای تصمیم‌گیرنده عمل می‌کند تا ارزیابی‌ها و قضاوت‌های خود را مورد بررسی و بازبینی قرار دهد [۱۹].

برای تعیین اولویت‌های سراسری گزینه‌ها در سطح آخر ساختار سلسله‌مراتبی، اولویت‌های محلی در میان تمام سطوح ساختار سلسله‌مراتبی را می‌توان بر اساس تجمیع و نرمال‌سازی مجموع اولویت‌های محلی به یک، تعیین کرد [۲۰]. در AHP، می‌توان به منظور بررسی ورودی‌های تغییریافته بر خروجی‌ها، تحلیل حساسیت انجام داد. بر این اساس، می‌توان سناریوهای مختلفی ایجاد کرد، و اگر هیچ تغییری در رتبه‌بندی‌ها ایجاد نشد، می‌توان گفت که نتایج استوار است، در غیراین صورت، حساس است [۲۰]. می‌توان از AHP در تصمیم‌گیری گروهی استفاده کرد. این امر در مواردی که باید تصمیمات پیچیده‌ای اتخاذ شود که مشتمل بر سطوح بالای ریسک است، مورد نیاز است، و در این حالت، بهتر است که تصمیمات مبتنی بر قضاوت‌ها و نظرات چند تصمیم گیرنده باشد، نه آنکه صرفاً متکی بر یک تصمیم گیرنده‌ی فردی باشد [۱۶]. دو روال غالب برای تعیین در تصمیم‌گیری

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

گروهی عبارت‌اند از: محاسبه‌ی میانگین هندسی ارزیابی‌های فردی در ماتریس‌های دو به دو، که می‌توان اولویت‌ها را از آن‌ها به دست آورد؛ و روش دوم، ابتدا اولویت‌ها محاسبه می‌شوند، و سپس با استفاده از روش میانگین حسابی موزون تجمیع می‌شوند [۲۱]. به منظور کار با قضاوت‌های انسانی و مسایل ارزیابی واقعی، بسط‌های فازی بر مبنای نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، که زاده و همکاران [۲۲] آن را در سال ۱۹۶۵ به‌عنوان تعمیمی از نظریه‌ی مجموعه‌های کلاسیک ابداع کرد، با AHP تلفیق شده است [۲۳]. یک مطالعه‌ی مروری که به‌وسیله‌ی مردانی و همکاران [۲۴] درباره‌ی تکنیک‌ها و کاربردهای تصمیم‌گیری چندمعیاری فازی انجام شد، نشان داد که تکنیک AHP فازی، که نظریه‌ی مجموعه‌های فازی را با AHP کلاسیک تلفیق می کند، متداول‌ترین روش در میان تکنیک‌های MCDA است که در آن از ابزارها و رویکردهای تصمیم‌گیری فازی استفاده می‌شود. این رویکرد در سال‌های اخیر کاربردهای زیادی پیدا کرده است، و روش مؤثری برای تصمیم‌گیری در محیط‌های فازی به شمار می‌رود [۲۵].

یکی از علل کلیدی این موفقیت در کاربردهای AHP، نرم‌افزار کاربرپسند اکسپِرت چویس[1] است، که از رابط گرافیکی شهودی استفاده می کند، و قابلیت محاسبه‌ی وزن‌های اولویت، ارزیابی سازگاری و رویکردهای مختلفی برای تحلیل حساسیت دارد [۱۷]. تلفیق AHP با تکنیک‌های دیگر، مانند نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، برنامه‌ریزی ریاضی، تحلیل پوششی داده‌ها، شبکه‌های عصبی مصنوعی، و الگوریتم‌های ژنتیکی تصمیمات واقع‌گرایانه‌ی بهتری نسبت به روش AHP به‌تنهایی ایجاد می کند [۱۹]. به‌طوری که ایشیزاکا و لبیب [۲۰] در مقاله‌ی مروری جامع خود درباره‌ی تحولات عمده‌ی روش‌های AHP ذکر کرده‌اند، تردیدی نیست که AHP در کاربردهای مختلف به‌طور گسترده‌تری مورد استفاده قرار خواهد گرفت، هر چند که برخی منازعات نظری در آن وجود دارند، از قبیل برگشت رتبه، که هنوز به‌طور کامل حل نشده است، و فرض استقلال معیارها، که در برخی از موارد می‌توانند محدودیت‌هایی را در استفاده از روش AHP ایجاد کنند، و فرآیند تحلیل شبکه‌ای به‌عنوان راه‌حلی برای این مساله پیشنهاد شده است.

تعیین اولویت مساله‌ای است که در مقالات مربوط به AHP به‌صورت گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. گسترده‌ترین رویکرد مورد استفاده روش مشهور بردار ویژه (EM) است که به وسیله‌ی ساعتی [۲۶] پیشنهاد شده است، ولی رویکردهای متعدد دیگری نیز در مقالات AHP ارایه شده است، مانند روش کمترین مربعات لگاریتمی (LLSM) [۲۷]، روش برنامه‌ریزی آرمانی (GPM) [۲۸]، روش وزن ویژه‌ی گرادیانی (GEM) [۲۹]، رویکرد بیشینه‌سازی ضریب همبستگی (CCMA) [۳۰]، و موارد دیگر.

خوش فطرت [۳۱] در رساله دکتری خود به تعیین اولویت واحدهای تصمیم گیری با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها و به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک پرداخته است و برای این منظور بطور جامع بر روش‌های قدیمی برای تعیین اوزان و اولویت در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی مرور داشته است.

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، که به وسیله‌ی چارنز و همکاران [۳۲] ابداع شده است، برای تعیین اولویت

[1] Expert Choice.

در AHP استفاده شده است، که در آن معیارها یا گزینه‌های تصمیم در یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو به عنوان واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) در نظر گرفته می‌شوند، عناصر سطری ماتریس مقایسه‌ی دو به دو، خروجی‌های DMUها هستند، و کارایی DMUها به عنوان اولویت‌های ماتریس مقایسه‌ی دو به دو محسوب می‌شوند. بر اساس این دیدگاه‌ها، راماناتان [۳۳] یک روش DEAHP برای به‌دست آوردن وزن‌ها و تجمعی وزن‌ها در AHP ابداع کرد، که توسط سوکلی و همکاران [۳۴] برای انتخاب تأمین‌کنندگان مورد استفاده قرار گرفت. DEAHP می‌تواند وزن‌های حقیقی را برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی سازگار ایجاد کند، ولی برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی ناسازگار، وزن‌های نامفهوم و غیرمنطقی به دست می‌دهد. معایب DEAHP به‌وسیله وانگ و همکاران [۳۵، ۳۶] به تفصیل و با ارایه‌ی مثال‌های عددی بررسی شده‌اند. به منظور غلبه بر این ایرادات، وانگ و همکاران [۳۶] یک مدل DEA با ناحیه‌ی اطمینان (DEA/AR) را برای ایجاد وزن‌ها در AHP پیشنهاد کردند. مدل DEA/AR می‌تواند هم برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی سازگار و هم برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی نارسازگار، وزن‌های شهودی و حتی منطقی ارایه دهد. وانگ و همکاران [۳۷] نیز یک روش برنامه‌ریزی خطی (LP) ساده ولی عملی را برای ایجاد مطلوب‌ترین وزن‌ها از ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دو پیشنهاد کردند. وانگ و چین [۳۸] مدل DEAی جدیدی را برای تعیین اولویت در AHP ارایه کردند. مدل DEAی جدید به جای کارایی هر DMU، کارایی نسبی را به عنوان اولویت آن تعریف می‌کند. در نتیجه، مدل DEAی جدید مطلوب‌ترین وزن‌ها را که نزدیک وزن‌های بردار ویژه‌ی ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دو هستند، ایجاد می‌کند.

مطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر معیار یا گزینه از دیدگاه خود آن مورد بررسی قرار می‌گیرند، که به آن خودارزیابی می‌گویند. وقتی که یک معیار یا گزینه بهترین وزن خود را ارزیابی می‌کند، وزن معیارها یا گزینه‌های دیگر را نیز می‌سنجد. به این‌گونه وزن‌ها که به وسیله‌ی معیارها یا گزینه‌های دیگر سنجیده شده‌اند، وزن‌های متقابل می‌گویند و به ارزیابی انجام‌شده توسط معیارها یا گزینه‌های دیگر، ارزیابی همتایان می‌گویند. روشن است که وزن‌های متقابل ممکن است برای معیارها یا گزینه‌ها مطلوب نباشند. بنابراین، استفاده از مطلوب‌ترین وزن‌ها برای تصمیم‌گیری همه‌جانبه نیست.

از طرف دیگر، وزن معیارها یا گزینه‌ها را از دیدگاه بدبینانه نیز می‌توان تعیین کرد. وزن‌های تعیین‌شده از دیدگاه بدبینانه را می‌توان تحت عنوان نامطلوب‌ترین وزن یا وزن بدبینانه نامگذاری کرد، که مقادیر آن شامل مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی یک است. در صورتی که مقدار نامطلوب‌ترین وزن یک معیار یا گزینه یک باشد، گفته می‌شود که آن معیار یا گزینه ناکارای بدبینانه است؛ در غیراین صورت، گفته می‌شود که غیرناکارای بدبینانه است. معمولاً تصور بر این است که معیارها یا گزینه‌های ناکارای بدبینانه عملکرد بدتری نسبت به معیارها یا گزینه‌های غیرناکارای بدبینانه دارند.

به نوشته‌ی وانگ و همکاران [۳۹]، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه عملکرد n، DMU را در دو حالت انتهایی اندازه‌گیری می‌کنند، که بهترین یا بدترین حالت هستند. از نظر تئوری، این دو کارایی را باید به طور هم‌زمان در نظر گرفت، تا یک سنجش کلی از عملکرد هر یک از n، DMU به دست آید. این چیزی است که

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

به آن تحلیل مرز دوگانه می‌گویند. مؤلفان متعددی از این رویکرد برای ارزیابی و سنجش عملکرد استفاده کرده‌اند. خوش فطرت و همکاران[۴۰] ازتعمیم روش حداقل مربعات وزنی برای ماتریس‌های مقایسه زوجی سازگار و ناسازگار برای تعیین وزن استفاده کرده‌اند که در دو نوع خطی و غیرخطی بیان شده است. جهت کاهش پیچیدگی محاسبات از الگوریتم ژنتیک و روش سیمپلکس استفاده شده است. خوش فطرت و همکاران[۴۱] یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی NLP را برای استخراج وزن‌های واقعی استفاده کردند، که با الگوریتم ژنتیک حل شده است. خوش فطرت و حسین زاده لطفی [۴۲]یک مدل با کارایی متقاطع در جهت تعیین اولویت واحدهای تصمیم‌گیری در AHP را ارایه دادند که مشکل وجود جواب‌های بهین دگرین را برطرف نموده است. سپهریان و همکاران [۴۳] با استفاده از روش نامطلوب‌ترین وزن به رتبه‌بندی معیارها و گزینه‌ها پرداخته و با استفاده از آن معیارها و گزینه‌هایی که در روش مطلوب‌ترین وزن در یک سطح ارزیابی می‌شدند، از هم افتراق داده شده‌اند. یو و همکاران [۴۴] یک مدل ارزیابی کارایی بازه‌ای برای مدیریت آلودگی هوا بر اساس شاخص‌ها از دیدگاه مرز دوگانه ارایه کردند. وانگ و لیو [۴۵] رتبه‌بندی DMUها را با استفاده ازکران‌های بالا و پایین کارایی نرمال‌سازی‌شده به وسیله‌ی تحلیل مرز دوگانه انجام دادند. سیدعلیزاده گنجی و همکاران [۴۶] از رویکرد مرز دوگانه برای تعیین وزن عملگر OWA و استدلال شهودی در ارزیابی امنیت جاده‌ای استفاده کردند. سیدعلیزاده گنجی و همکاران [۴۷] تجمیع روش کارایی متقاطع و استدلال شهودی برای اندازه‌گیری امنیت جاده‌ای را با رویکرد تحلیل مرز دوگانه انجام دادند. عزیزی و حسین‌زاده [۴۸] رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری را با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه انجام دادند؛ روش آن‌ها نسبت به روش‌های دیگر، رتبه‌بندی منطقی ایجاد می‌کند. عزیزی و همکاران [۴۹] از رویکرد تحلیل مرز دوگانه برای انتخاب فناوری‌های پیشرفته‌ی تولید استفاده کردند. شاخص رتبه‌بندی پیشنهادی آن‌ها نسبت به سایر شاخص‌ها محاسبات کم‌تری داشت. برای این منظور، ما این رویکرد را به DEAHP بسط می‌دهیم تا وزن‌های منطقی معیارها یا گزینه‌ها را تعیین کنیم.

در این مقاله، ابتدا مدل جدیدی را برای وزن‌دهی معیارها یا گزینه‌ها پیشنهاد می‌کنیم که آن را مدل DEA/AR بدبینانه می‌نامیم و ما را قادر می‌سازد که وزن معیارها یا گزینه‌های کل مجموعه‌ی معیارها یا گزینه‌های مورد بررسی را رتبه‌بندی کنیم، حتی آن‌هایی که کارا هستند. مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین وزن برای یک معیار یا گزینه، بازه‌ی وزن آن معیار یا گزینه را تعریف می‌کند.

به منظور ایجاد یک وزن فراگیر و در عین حال منطقی برای هر معیار یا گزینه‌ی تصمیم، در این مقاله، یک رویکرد تحلیل مرز دوگانه جهت اشتقاق وزن‌ها پیشنهاد می‌کنیم. رویکرد تحلیل مرز دوگانه، وزن‌های یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو را نه تنها از دیدگاه خوشبینانه می‌سنجد، بلکه از دیدگاه بدبینانه نیز ارزیابی می‌کند. بنابراین، وزن‌های به دست آمده با رویکرد تحلیل مرز دوگانه منطقی‌تر و منصفانه‌ترند.

ادامه‌ی این مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است: قسمت ۲ به اختصار مدل DEAHP را برای تولید مطلوب‌ترین وزن‌ها جهت ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دو مرور می‌کند. سپس رویکرد تحلیل مرز دوگانه در قسمت ۳ ارایه می‌شود. مثال‌های عددی در قسمت ۴ بررسی می‌شوند. نتیجه‌گیری مقاله در قسمت ۵ ارایه می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

۲ DEAHP

فرض کنید

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو با $a_{ii}=۱$ و $a_{ji}=۱/a_{ij}$ برای $j\neq i$ باشد و $W=(w_۱,\ldots,w_n)^T$ بردار اولویت آن باشد. DEAHP هر سطر ماتریس A را به عنوان یک DMU در نظر می‌گیرد، هر ستون را به عنوان یک خروجی منظور می‌کند، و برای همه‌ی DMUها، مقدار ورودی ساختگی یک را مفروض می‌کند. بنابراین، هر n DMU خروجی و یک ورودی ثابت ساختگی دارد، که بر اساس آن، مدل CCR با ماهیت ورودی زیر ساخته می‌شود تا اولویت‌های محلی (وزن‌ها)ی ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی A برآورد شود [۳۲]:

$$\begin{aligned} &\text{Max } w_o=\sum_{j=۱}^{n} a_{oj}v_j \\ &\text{s.t.}\begin{cases} u_۱=۱ \\ \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}v_j-u_۱\leq ۰ \quad i=۱,\ldots,n \\ u_۱,v_j\geq ۰ \quad j=۱,\ldots,n \end{cases} \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در اینجا DMU_o نشان‌دهنده‌ی معیار یا گزینه‌ی مورد ارزیابی است. مقدار بهینه‌ی تابع هدف در مدل (۲)، w_o^*، نشان‌دهنده‌ی کارایی DMU_o است و به عنوان اولویت محلی آن استفاده می‌شود. مدل LP (۲) برای تمام DMUها حل می‌شود تا بردار اولویت محلی $W^*=(w_۱^*,\ldots,w_n^*)^T$ برای ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی A به دست آید. راماناتان [۱۹] ثابت کرده‌اند که DEAHP می‌تواند در صورتی که A سازگار کامل باشد، یعنی A در شرط $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$ برای تمام $i,j,k=۱,\ldots,n$ صدق کند، وزن‌های حقیقی را به دست آورد.

به طوری که در قسمت قبل گفته شد، DEAHP دارای معایب چندی است. عیب اصلی DEAHP آن است که برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی ناسازگار، وزن‌های غیرمنطقی و غیرشهودی ایجاد می‌کند. مثلاً ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۱/۲ & ۱ & ۳ \\ ۱/۵ & ۱/۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۵ \\ ۱/۵ & ۱ & ۳ \\ ۱/۵ & ۱/۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۵ \\ ۱/۹ & ۱ & ۳ \\ ۱/۵ & ۱/۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

بردار وزن‌های محلی به دست آمده با استفاده از DEAHP برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی فوق همان (۰/۲و۰/۶و۱) است، که بدان معنا است که DEAHP به تغییرات در $a_{۱۲}$ به $b_{۱۲}$ و $c_{۱۲}$ (عنصر دوم سطر اول به ترتیب در ماتریس‌های A، B، و C) حساس نیست. در حقیقت، DEAHP برای تولید وزن‌های محلی فقط از داده‌های ستون سوم استفاده می‌کند. جدول ۱ وزن‌های محلی را با استفاده از روش DEAHP برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی A، B و C مقایسه می‌کند.

جدول ۱. وزن‌های محلی با استفاده از روش DEAHP برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی A، B، و C.

ماتریس	تابع هدف	وزن‌های محلی	
		نرمال‌سازی‌نشده	نرمال‌سازی‌شده
A	$w_۱$	۱	۰/۵۵۵
	$w_۲$	۰/۶	۰/۳۳۳
	$w_۳$	۰/۲	۰/۱۱۱
B	$w_۱$	۱	۰/۵۵۵
	$w_۲$	۰/۶	۰/۳۳۳
	$w_۳$	۰/۲	۰/۱۱۱
C	$w_۱$	۱	۰/۵۵۵
	$w_۲$	۰/۶	۰/۳۳۳
	$w_۳$	۰/۲	۰/۱۱۱

در قسمت بعد، یک رویکرد جدید را برای تعیین اولویت در AHP ایجاد می‌کنیم تا بر معایب DEAHP فایق آییم.

۳ رویکرد تحلیل مرز دوگانه

• مدل DEA/AR خوشبینانه برای AHP

وانگ و همکاران [۳۴] برای تعیین مطلوب‌ترین وزن‌های معیارها یا گزینه‌های تصمیم، مدل DEA/AR زیر را پیشنهاد کردند:

$$\begin{aligned} &\text{Max } w_o \\ &\text{s.t. } \begin{cases} w_i = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} v_j \le ۱ & i=۱,\ldots,n \\ w_j / \beta \le v_j \le w_j / n & j=۱,\ldots,n \end{cases} \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در اینجا اندیس «o» به معیار تصمیم یا گزینه‌ی مورد ارزیابی، یعنی DMU_o، اشاره دارد، v_j

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

$(j=1,\dots,n)$ متغیرهای تصمیم هستند، و β کران بالای بردار ویژه‌ی بیشینه‌ی ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ است، که با تساوی زیر تعیین می‌شود:

$$\beta=\min\left\{\max_i\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}r_j\right),\max_i\left(\frac{1}{c_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}c_j\right)\right\} \tag{4}$$

که در اینجا $r_1,\dots,r_n$ و $c_1,\dots,c_n$ به ترتیب مجموع سطری و مجموع ستونی ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ هستند. روشی را که از مدل (۳) برای به دست آوردن وزن‌ها از ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دو استفاده می‌کند، روش DEA/AR خوشبینانه می‌نامند، و وزن‌های حاصله را وزن‌های خوشبینانه می‌نامند.

مدل (۳) کارایی هر DMU را به عنوان اولویت آن تعریف می‌کند، یعنی $w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j$ $(i=1,\dots,n)$. قیود $w_j/\beta\le v_j\le w_j/n$ $(j=1,\dots,n)$ ناحیه‌ی اطمینان تحمیل‌شده بر مدل DEA/AR (۳) هستند. با حل مدل (۳) برای هر w_i $(i=1,\dots,n)$، مطلوب‌ترین وزن‌ها برای n معیار یا گزینه‌ی تصمیم را می‌توان به آسانی به دست آورد. وانگ و همکاران [۳۴] ثابت کرده‌اندکه مدل (۳) می‌تواند وزن‌های حقیقی را برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی سازگار ایجاد کند.

برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی A، B و C، وزن‌های موضعی آن‌ها که از مدل DEA/AR (۳) حاصل شده‌اند، همگی در جدول ۲ ارایه شده‌اند، که بر اساس آن می‌توان دید که وزن‌های حاصل از مدل DEA/AR (۳) به قدر کافی نسبت به تغییرات عناصر مقایسه‌ی a_{12}، b_{12} و c_{12} حساس هستند. وقتی که این‌ها از ۲ تا ۹ تغییر می‌کنند، وزن معیار یا گزینه‌ی دوم نیز از ۰/۵۳۱ تا ۰/۲۱۳ تغییر می‌کند. واضح است که مدل DEA/AR (۳) تغییرات مقایسه‌های دو به دو را در یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو بهتر از DEAHP منعکس می‌کند.

جدول ۲. وزن‌های محلی با استفاده از روش DEA/AR برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی A، B، و C.

ماتریس	تابع هدف	وزن‌های محلی
A	w_1	۱
	w_2	۰/۵۳۱
	w_3	۰/۱۸۸
B	w_1	۱
	w_2	۰/۲۹۵
	w_3	۰/۱۴۳
C	w_1	۱
	w_2	۰/۲۱۳
	w_3	۰/۱۲۵

در مورد ساختارهای سلسله‌مراتبی، وزن‌های موضعی را باید به‌صورت وزن‌های سراسری تجمیع کرد. فرض

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

کنید $w_1,\dots,w_J$ وزن‌های موضعی J معیار تصمیم و $w_{1j},\dots,w_{nj}$ وزن‌های موضعی n گزینه‌ی تصمیم در رابطه با معیار j -اُم $(j=1,\dots,J)$ باشند. فرض بر این است که همه‌ی آن‌ها قبلاً با حل مدل DEA/AR (۳) تولید شده‌اند، و مطابق جدول ۳، یک ماتریس تصمیم را تشکیل می‌دهند، که بر اساس آن، وزن سراسری هر گزینه‌ی تصمیم را می‌توان با استفاده از روش وزن‌دهی جمعی ساده (SAW) در تصمیم‌گیری چندشاخصی محاسبه کرد، و سپس با ماکزیموم آن‌ها نرمال‌سازی کرد. یعنی

$$w_{A_i}^* = \frac{\sum_{j=1}^{J} w_{ij} w_j}{\max\limits_{k\in\{1,\dots,n\}} \left\{ \sum_{j=1}^{J} w_{kj} w_j \right\}}, \quad i=1,\dots,n \tag{۵}$$

این نتایج دقیقاً همان نتایجی است که با حل مدل (۳) به دست می‌آید.

جدول ۳. تجمیع وزن‌های موضعی DEA/AR.

گزینه	معیار				وزن‌های سراسری
	w_1	w_2	$\dots$	w_J	
A_1	w_{11}	w_{12}	$\dots$	w_{1J}	$\sum_{j=1}^{J} w_{1j} w_j$
A_2	w_{21}	w_{22}	$\dots$	w_{2J}	$\sum_{j=1}^{J} w_{2j} w_j$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_N	w_{n1}	w_{n2}	$\dots$	w_{nJ}	$\sum_{j=1}^{J} w_{nj} w_j$

• مدل DEA/AR بدبینانه برای AHP

به خاطر نیاز به توسعه‌ی نظریه‌ی DEAHP و روش‌های آن و هم کاربردهای واقعی آن، مدل DEAHP بدبینانه‌ی جدیدی را پیشنهاد می‌کنیم که یک معیار یا گزینه‌ی تصمیم را از دیدگاه بدبینانه ارزیابی می‌کند. وزن‌هایی که از دیدگاه بدبینانه اندازه‌گیری شده‌اند، وزن‌های بدبینانه نامیده می‌شوند. وزن بدبینانه‌ی معیار یا گزینه‌ی تصمیم تحت ارزیابی نسبت به معیارها یا گزینه‌های تصمیم دیگر را می‌توان با مدل DEA/AR بدبینانه‌ی زیر اندازه‌گیری کرد:

$$\begin{aligned} &Min\ \hat{w}_o \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \hat{w}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \ge 1 & i=1,\dots,n \\ \hat{w}_j / \beta \le v_j \le \hat{w}_j / n & j=1,\dots,n \end{cases} \end{aligned} \tag{۶}$$

در اینجا نیز اندیس پایین « o» نشان‌دهنده‌ی گزینه یا معیار تصمیم تحت ارزیابی است، و β از رابطه‌ی (۴) تعیین می‌شود. در صورتی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود $\hat{w}_o^* = 1$ باشد، آنگاه گفته می‌شود که گزینه یا معیار تصمیم تحت ارزیابی ناکارای DEA/AR یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت، گفته می‌شود که غیرناکارای بدبینانه است. واضح است که غیرکارای خوشبینانه لزوماً به معنای ناکارای بدبینانه

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

نیست. و به همین ترتیب، غیرناکارای بدبینانه لزوماً به معنای کارای خوشبینانه نیست. بر خلاف مدل (۳)، که به آن مدل DEA/AR خوشبینانه می‌گویند، مدل DEA/AR بدبینانه‌ی (۶) در جستجوی نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر گزینه یا معیار تصمیم می‌باشد.

قضیه‌ی ۱: اگر $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی کاملاً همساز باشد، آنگاه مدل (۶) وزن‌های زیر را تولید می‌کند:

$$\hat{w}_i^* = \hat{w}_i / \min_{j\in\{1,\dots,n\}} \left\{\hat{w}_j\right\}, i=1,\dots,n$$

که نرمال‌سازی وزن‌های حقیقی $\hat{w}_i$ $(i=1,\dots,n)$ ماتریس مقایسه‌ی زوجی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ هستند.

برهان: چون $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی کاملاً همساز است، می‌توان آن را با وزن‌های بردار ویژه‌ی

$$\hat{w}_j = 1/\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad (j=1,\dots,n)$$

به‌صورت زیر مشخص‌سازی کرد:

$$a_{ij} = \hat{w}_i / \hat{w}_j (i,j=1,\dots,n)$$

بر این اساس داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} (\hat{w}_i/\hat{w}_j) v_j = \hat{w}_i \sum_{j=1}^{n} (v_j/\hat{w}_j) \ge 1 \qquad (i=1,\dots,n)$$

که از آن می‌توان رابطه‌ی زیر را به دست آورد:

$$\sum_{j=1}^{n} (v_j/\hat{w}_j) \ge 1/\hat{w}_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

بنابراین:

$$\sum_{j=1}^{n} (v_j/\hat{w}_j) \ge \max_i (1/\hat{w}_i) = 1/\min_{j\in\{1,\dots,n\}} \left\{\hat{w}_j\right\}$$

به این ترتیب، مقدار مینیمم تابع هدف مدل (۶) را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\hat{w}_o^* = \hat{w}_o \sum_{j=1}^{n} (v_j^*/\hat{w}_j) = \hat{w}_o / \min_{j\in\{1,\dots,n\}} \left\{\hat{w}_j\right\}$$

که $\hat{w}_o \in \left\{\hat{w}_1,\dots,\hat{w}_n\right\}$. □

- **وزن میانگین درجه‌ی دوم— ادغام وزن‌های خوشبینانه و بدبینانه**

وقتی که گزینه یا معیار تصمیم از دیدگاه‌های متفاوت ارزیابی می‌شود، هیچ تضمینی وجود ندارد که بتوان به یک ارزیابی سازگار دست یافت. به بیان کلی، وزن‌های گزینه یا معیار تصمیم اندازه‌گیری شده از دیدگاه‌های متفاوت یکسان نیستند، بلکه حتی با یکدیگر تفاوت قابل توجه داشته و یا قویاً ناسازگار هستند. لذا نیاز روشنی برای تجمیع آن‌ها به‌صورت یک وزن گزینه یا معیار تصمیم تلفیق‌شده برای هر گزینه یا معیار تصمیم جهت رسیدن به یک

نتیجه‌گیری وجود دارد. مشابه میانگین درجه‌ی دوم در جاهد و همکاران [۵۰]، می‌توانیم وزن‌های گزینه یا معیار تصمیم اندازه‌گیری‌شده از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه را به‌صورت یک میانگین درجه‌ی دوم تلفیق کنیم. یعنی

$$w_j = \sqrt{\left(\hat{w}_j^*\right)^۲ + \left(w_j^*\right)^۲} \qquad j = ۱, \ldots, n \tag{۷}$$

w_j $(j = ۱, \ldots, n)$ میانگین درجه‌ی دوم وزن گزینه یا معیار تصمیم j -اُم را از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه به طور هم‌زمان اندازه‌گیری می‌کند. از آنجا که وزن گزینه یا معیار تصمیم تعریف‌شده توسط (۷) تلفیق وزن‌های گزینه یا معیار تصمیم اندازه‌گیری‌شده از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه است، ما به آن وزن گزینه یا معیار تصمیم مبتنی بر «تحلیل مرز دوگانه» می‌گوییم، که جامع‌تر و واقع‌گرایانه‌تر از وزن گزینه یا معیار تصمیم مبتنی بر DEA/AR خوشبینانه است و به‌صورت بهتر و دقیق‌تری می‌تواند منعکس‌کننده‌ی وزن گزینه یا معیار تصمیم باشد.

۴ مثال‌های عددی

در این قسمت، سه مثال عددی را برای نشان دادن مزایا و کاربردهای بالقوه‌ی رویکرد تحلیل مرز دوگانه در AHP بررسی می‌کنیم. مثال ۱ با ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی انفرادی سر و کار دارد، مثال ۲ یک تصمیم‌گیری گروهی است، و مثال ۳ یک کاربرد AHP برای انتخاب بهترین رئیس برای یک دانشگاه است. تمام مدل‌ها روی یک کامپیوتر شخصی با استفاده از برنامه‌ی حل‌کننده LP به نام GAMS حل گردید.

مثال ۱: ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی ناسازگار زیر را در نظر بگیرید:

$$D = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۳ & ۷ & ۶ & ۶ & ۱/۳ & ۱/۴ \\ ۱/۵ & ۱ & ۱/۳ & ۵ & ۳ & ۳ & ۱/۵ & ۱/۷ \\ ۱/۳ & ۳ & ۱ & ۶ & ۳ & ۴ & ۶ & ۲ \\ ۱/۷ & ۱/۵ & ۱/۶ & ۱ & ۱/۳ & ۱/۴ & ۱/۷ & ۱/۸ \\ ۱/۶ & ۱/۳ & ۱/۳ & ۳ & ۱ & ۱/۲ & ۱/۵ & ۱/۶ \\ ۱/۶ & ۱/۳ & ۱/۴ & ۴ & ۲ & ۱ & ۱/۵ & ۱/۶ \\ ۳ & ۵ & ۱/۶ & ۷ & ۵ & ۵ & ۱ & ۱/۲ \\ ۴ & ۷ & ۱/۲ & ۸ & ۶ & ۶ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

جدول ۴ اولویت‌های به‌دست آمده از مدل‌های DEAی (۳) و (۶) را نشان می‌دهد، که بر اساس آن دیده می‌شود که دو مدل متمایز $C_۴$ را به عنوان کم اهمیت‌ترین معیار یا گزینه ارزیابی می‌کنند (برای این مثال $\beta = ۱۴/۴۵۶$ به دست آمده است). تفاوت این دو مدل در چگونگی ارزیابی $C_۳$ و $C_۸$ است. مدل DEA/AR (۶) $C_۸$ را مهم‌ترین معیار یا گزینه‌ی تصمیم ارزیابی می‌کند و $C_۳$ را بعد از آن قرار می‌دهد. مدل DEA/AR (۳)، $C_۳$ و $C_۸$ را در یک سطح یکسان اهمیت ارزیابی می‌کند. بر اساس عنصر قضاوت $a_{۸۳} = ۱/۲$ در ماتریس مقایسه‌ی دو به دو، منطقی به نظر می‌رسد که $C_۳$ باید مهم‌تر از $C_۸$ باشد. ولی همان طور که وانگ و همکاران [۳۳] خاطرنشان کرده‌اند، در یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو، قضاوت‌های مستقیم و غیرمستقیم وجود دارند.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

قضاوت‌های مستقیم عناصری در یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو هستند که مستقیماً به وسیله‌ی تصمیم‌گیرنده ارایه شده‌اند، در حالی که قضاوت‌های غیرمستقیم آن‌هایی هستند که از قضاوت‌های مستقیم با استفاده از شرط سازگاری کامل $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$ به دست می‌آیند، که در اینجا k می‌تواند هر عددی بین ۱ و n باشد. رتبه‌بندی اولویت در یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو نمی‌تواند فقط قضاوت‌های مستقیم را در نظر بگیرد، بلکه باید قضاوت‌های غیرمستقیم را نیز در نظر بگیرد. بدین معنا، معادله‌ی (۷) یک رتبه‌بندی کلی بر اساس قضاوت‌های کلی ارایه می‌کند، که میانگین درجه‌ی دوم قضاوت‌های مستقیم و غیرمستقیم از دیدگاه‌های متفاوت هستند. بنابراین، ما بر این باور هستیم که منطقی‌تر است که $C_{۸}$ کمی از $C_{۳}$ مهم‌تر است.

جدول ٤. اولویت‌های ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی D و رتبه‌های آن‌ها با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه.

مدل	معیار یا گزینه تصمیم							
	$C_{۱}$	$C_{۲}$	$C_{۳}$	$C_{۴}$	$C_{۵}$	$C_{۶}$	$C_{۷}$	$C_{۸}$
مدل DEA/AR (۳)	۰/۸۹۴ (۳)	۰/۲۷۳ (۵)	۱/۰۰۰ (۱)	۰/۰۷۹ (۸)	۰/۱۴۹ (۷)	۰/۱۷۸ (۶)	۰/۷۱۱ (۴)	۱/۰۰۰ (۱)
مدل DEA/AR (۶)	۹/۱۹۹ (۳)	۲/۵۴۱ (۵)	۱۱/۶۱۶ (۲)	۱/۰۰۰ (۸)	۱/۶۷۸ (۷)	۱/۸۲۷ (۶)	۸/۰۵۰ (۴)	۱۲/۰۳۸ (۱)
معادله‌ی (۷)	۹/۲۴۲ (۳)	۲/۵۵۶ (۵)	۱۱/۶۵۹ (۲)	۱/۰۰۳ (۸)	۱/۶۸۵ (۷)	۱/۸۳۶ (۶)	۸/۰۸۱ (۴)	۱۲/۰۷۹ (۱)
نرمال‌سازی معادله‌ی (۷)	۰/۱۹۲ (۳)	۰/۰۵۳ (۵)	۰/۲۴۲ (۲)	۰/۰۲۱ (۸)	۰/۰۳۵ (۷)	۰/۰۳۸ (۶)	۰/۱۶۸ (۴)	۰/۲۵۱ (۱)

جدول‌های ۵ و ۶ نتایج وزن‌های به‌دست آمده از دو مدل مختلف DEA/AR را نشان می‌دهند. به خوبی روشن است که وزن‌های به‌دست آمده در جدول‌های ۵ و ۶ غیرصفر هستند. بنابراین، وزن‌های خوشبینانه و بدبینانه عقلانی‌تر و منطقی‌تر از مطلوب‌ترین وزن‌های به‌دست آمده از مدل DEAHP (۲) دانسته می‌شوند.

جدول ۵. مطلوب‌ترین وزن‌ها بر اساس مدل DEA/AR (۳).

تابع هدف	وزن‌ها							
	$v_{۱}$	$v_{۲}$	$v_{۳}$	$v_{۴}$	$v_{۵}$	$v_{۶}$	$v_{۷}$	$v_{۸}$
$w_{۱}$	۰/۰۶۲	۰/۰۲۳	۰/۱۲۵	۰/۰۰۹	۰/۰۱۸	۰/۰۲۱	۰/۰۷۵	۰/۰۶۹
$w_{۲}$	۰/۰۶۲	۰/۰۱۹	۰/۱۲۴	۰/۰۱۰	۰/۰۱۹	۰/۰۲۲	۰/۰۵۶	۰/۱۲۵
$w_{۳}$	۰/۰۶۳	۰/۰۲۹	۰/۰۶۹	۰/۰۰۸	۰/۰۱۵	۰/۰۱۸	۰/۰۸۶	۰/۰۶۹
$w_{۴}$	۰/۰۷۶	۰/۰۱۷	۰/۱۲۵	۰/۰۱۰	۰/۰۱۸	۰/۰۱۲	۰/۰۶۴	۰/۱۲۵
$w_{۵}$	۰/۰۶۲	۰/۰۱۹	۰/۱۲۵	۰/۰۱۰	۰/۰۱۹	۰/۰۲۱	۰/۰۵۸	۰/۱۲۵
$w_{۶}$	۰/۰۶۲	۰/۰۱۹	۰/۱۲۵	۰/۰۱۰	۰/۰۱۹	۰/۰۲۱	۰/۰۵۸	۰/۱۲۵
$w_{۷}$	۰/۰۸۸	۰/۰۲۸	۰/۰۶۸	۰/۰۰۸	۰/۰۱۴	۰/۰۱۷	۰/۰۴۹	۰/۰۶۹
$w_{۸}$	۰/۰۸۴	۰/۰۲۷	۰/۰۵۸	۰/۰۰۸	۰/۰۱۴	۰/۰۱۷	۰/۰۶۳	۰/۰۶۹

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

جدول ٦. نامطلوب‌ترین وزن‌ها بر اساس مدل DEA/AR (۶).

تابع هدف	وزن‌ها							
	$v_{۱}$	$v_{۲}$	$v_{۳}$	$v_{۴}$	$v_{۵}$	$v_{۶}$	$v_{۷}$	$v_{۸}$
$w_{۱}$	۱/۱۵۰	۰/۲۱۲	۱/۰۱۳	۰/۱۲۵	۰/۲۲۵	۰/۱۴۸	۱/۱۸۵	۱/۷۴۳
$w_{۲}$	۱/۲۵۷	۰/۱۹۰	۱/۷۱۰	۰/۰۶۹	۰/۱۱۹	۰/۱۲۶	۱/۰۷۶	۱/۶۲۷
$w_{۳}$	۱/۳۱۲	۰/۲۱۳	۱/۴۵۲	۰/۱۲۵	۰/۲۳۱	۰/۱۴۹	۰/۶۵۴	۱/۵۶۴
$w_{۴}$	۰/۸۰۲	۰/۴۱۸	۱/۵۶۳	۰/۱۲۵	۰/۱۵۰	۰/۲۶۷	۰/۶۳۶	۱/۶۷۰
$w_{۵}$	۱/۲۰۹	۰/۳۵۸	۱/۰۷۰	۰/۰۶۹	۰/۱۱۶	۰/۲۳۳	۱/۲۵۱	۱/۸۶۱
$w_{۶}$	۱/۲۳۱	۰/۳۲۵	۱/۴۰۸	۰/۰۶۹	۰/۱۱۷	۰/۱۲۶	۱/۱۶۱	۱/۷۴۹
$w_{۷}$	۰/۷۴۲	۰/۲۱۳	۱/۷۰۵	۰/۱۲۵	۰/۲۱۹	۰/۱۴۹	۱/۰۰۶	۱/۵۰۵
$w_{۸}$	۰/۷۴۲	۰/۲۱۳	۱/۷۰۵	۰/۱۲۵	۰/۲۱۹	۰/۱۴۹	۱/۰۰۶	۱/۵۰۵

مثال ۲: یک مساله‌ی تصمیم‌گیری گروهی را در AHP در نظر بگیرید: از یک مدیر سطح بالا و سه کارشناس از بخش‌های مختلف خواسته‌شده است که اهمیت نسبی پنج معیار تصمیم را مقایسه کنند. چهار ماتریس مقایسه‌ی دو به دو که توسط مدیر ارشد و سه کارشناس ارایه شده‌اند، از این قرارند[۲۸]:

$$A^{(۱)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱/۲ & ۱/۳ \\ ۱/۳ & ۱ & ۱ & ۱/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۴ & ۲ & ۲ & ۱ & ۱/۲ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۸ & ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱/۸ & ۱ & ۱/۸ & ۱/۳ & ۱/۵ \\ ۱ & ۸ & ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱/۲ & ۳ & ۱/۲ & ۱ & ۱ \\ ۱/۲ & ۵ & ۱/۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{(۳)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۸ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۸ & ۱ & ۱/۸ & ۱/۵ & ۱/۸ \\ ۱ & ۸ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۱/۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۸ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{(۴)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۲ & ۱ & ۱/۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱/۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

وزن‌های اهمیت نسبی چهار تصمیم‌گیرنده برای مدیر ارشد ۵۰٪ و برای سه کارشناس به ترتیب ۳۰٪، ۱۵٪، و ۵٪ فرض می‌شوند. پس از تجمیع چهار ماتریس مقایسه‌ی دو به دو به‌صورت یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی گروهی، با استفاده از متوسط هندسی وزنی $(i, j = ۱,\dots,n)$ $b_{ij}=\prod_{k=۱}^{۴}\left(a_{ij}^{(k)}\right)^{h_k}$ که در اینجا h_k $(k=۱,\dots,۴)$ وزن‌های اهمیت نسبی چهار تصمیم‌گیرنده هستند، داریم:

$$E=\left(e_{ij}\right)_{n\times n}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲/۶۳۹۰ & ۱/۷۳۲۱ & ۲/۴۶۲۳ & ۱/۲۳۱۱ \\ ۰/۳۷۸۹ & ۱ & ۰/۳۷۸۹ & ۰/۳۹۹۵ & ۰/۲۶۰۸ \\ ۰/۵۷۷۴ & ۲/۶۳۹۰ & ۱ & ۰/۹۳۳۰ & ۰/۸۷۰۶ \\ ۰/۴۰۶۱ & ۲/۵۰۳۲ & ۱/۰۷۱۸ & ۱ & ۰/۷۰۷۱ \\ ۰/۸۱۲۳ & ۳/۸۳۴۶ & ۱/۱۴۸۷ & ۱/۴۱۴۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای این ماتریس مقایسه‌ی دو به دو، مقدار ویژه‌ی بیشینه $\lambda_{\max}=۵/۰۷۵$ است، و وزن‌های بردار ویژه‌ی متناظر $w_{EM}=(۰/۳۱۱,۰/۰۷۹,۰/۱۸۸,۰/۱۷۲,۰/۲۴۹)$ با نسبت همسازی $CR=۰/۰۱۷$ هستند، که بر این اساس، رتبه‌بندی اولویت پنج معیار به‌صورت $C_۱ \succ C_۵ \succ C_۳ \succ C_۴ \succ C_۲$ است. ارزیابی‌های DEA/AR خوشبینانه و بدبینانه و وزن میانگین درجه‌ی دوم نیز دقیقاً همین ترتیب اولویت را به دست می‌دهند، که در جدول ۷ نشان داده شده است. از آنجا که دیده می‌شود که ارزیابی وزن میانگین درجه‌ی دوم از معادله‌ی (۷) نه فقط دقیقاً رتبه‌بندی اولویت یکسانی ایجاد می‌کند، بلکه اولویت‌های یکسانی را نیز همانند روش بردار ویژه به دست می‌دهد. این نشان‌دهنده‌ی درستی وزن میانگین درجه‌ی دوم (۷) است، و این واقعیت را نشان می‌دهد که وزن‌های میانگین درجه‌ی دوم عقلانی‌تر و منطقی‌تر از مطلوب‌ترین وزن‌ها هستند (برای این مثال $\beta=۵/۵۱۴$ به دست آمده است).

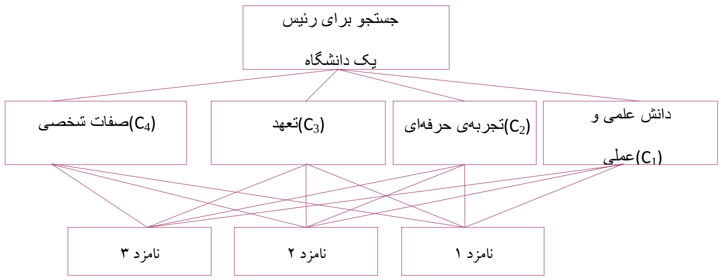
جدول ۷. اولویت‌های ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی E و رتبه‌های آن‌ها با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه.

	معیار یا گزینه‌ی تصمیم				
	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$
مدل DEA/AR (۳)	۱/۰۰۰ (۱)	۰/۲۵۷ (۵)	۰/۶۱۰ (۳)	۰/۵۵۸ (۴)	۰/۸۰۷ (۲)
مدل DEA/AR (۶)	۳/۸۹۵ (۱)	۱/۰۰۰ (۵)	۲/۳۶۲ (۳)	۲/۱۶۷ (۴)	۳/۱۳۵ (۲)
معادله‌ی (۷)	۴/۰۲۱ (۱)	۱/۰۳۲ (۵)	۲/۴۳۹ (۳)	۲/۲۳۸ (۴)	۳/۲۳۷ (۲)
نرمال‌سازی معادله‌ی (۷)	۰/۳۱۰ (۱)	۰/۰۸۰ (۵)	۰/۱۸۸ (۳)	۰/۱۷۳ (۴)	۰/۲۵۰ (۲)

مثال ۳: به عنوان مثالی از تجمیع بهترین اولویت‌های محلی بدون نرمال‌سازی، یک مثال عددی را بررسی

می‌کنیم، که در آن از AHP برای جستجو جهت رئیس یک دانشگاه استفاده می‌شود. مجموعه‌ی داده‌های این مثال از وانگ و چین [۲۸] گرفته شده است. معیارهای انتخاب که توسط کمیته‌ی جستجو در نظر گرفته شده‌اند، شامل دانش آکادمیک و کارکردی ($C_۱$)، تجربه‌ی حرفه‌ای ($C_۲$)، تعهد ($C_۳$)، و خصلت‌های شخصی ($C_۴$) هستند. نامزد ایده‌آل باید این خصلت‌ها را هر چه بیشتر دارا باشد. پس از یک دوره‌ی طولانی جستجو، سه نامزد بالقوه برای مصاحبه توسط کمیته انتخاب شدند. شکل ۱ ساختار سلسله‌مراتبی برای این مساله‌ی تصمیم‌گیری انتخاب را نشان می‌دهد، که از نظر ماهیت، یک تصمیم‌گیری گروهی است، ولی فرض شده است که کمیته‌ی جستجو در تمام ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی جدول ۸ به اتفاق نظر دست یافته است.

از اولویت‌های محلی جدول ۸ مشاهده می‌شود که اهمیت نسبی معیارها از دیدگاه‌های متفاوت منجر به انتخاب $C_۱$ به‌عنوان مهم‌ترین معیار می‌شود. یک چنین ارزیابی کاملاً درست می‌باشد، زیرا ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی چهار معیار انتخاب نسبت به هدف تصمیم به روشنی از طریق سطر اول خود نشان داده است که $C_۱$ مهم‌تر از سایر معیارها است. بهترین نامزد واقعی، نامزد ۱ تعیین می‌شود، که در دو معیار مهم‌تر $C_۱$ و $C_۴$، عملکردی بهتر از نامزد ۲ دارد. بنابراین، نامزد ۱ نهایتاً جهت پذیرش به شورای دانشگاه می‌تواند معرفی شود.



شکل ۱. سلسله‌مراتب انتخاب بهترین رئیس برای یک دانشگاه.

جدول ۸. ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دو برای چهار معیار انتخاب و سه نامزد و بهترین اولویت‌های محلی آن‌ها با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه.

معیار	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	اولویت‌های محلی		
					مدل DEA/AR (۳)	مدل DEA/AR (۶)	معادله‌ی (۷)
مقایسه‌های دو به دوی چهار معیار انتخاب نسبت به هدف تصمیم							
$C_۱$	۱	۵	۳	۲	۱/۰۰۰	۷/۴۶۳	۷/۵۳۰
$C_۲$	۱/۵	۱	۱/۵	۱/۵	۰/۱۳۴	۱/۰۰۰	۱/۰۹۰
$C_۳$	۱/۳	۵	۱	۱/۳	۰/۳۹۵	۲/۸۰۲	۲/۸۳۰
$C_۴$	۱/۲	۵	۳	۱	۰/۷۳۰	۵/۲۲۴	۵/۲۷۵
نسبت سازگاری $CR = ۰/۰۷۹۷$ و $\beta = ۵/۲۷۲$							
نامزد	نامزد ۱	نامزد ۲	نامزد ۳		اولویت‌های محلی		
					مدل DEA/AR (۳)	مدل DEA/AR (۶)	معادله‌ی (۷)
مقایسه‌های دو به دوی سه نامزد نسبت به معیار $C_۱$							
نامزد ۱	۱	۳	۲		۱/۰۰۰	۳/۷۵۰	۳/۸۸۱

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

نامزد ۲	۱/۳	۱	۱/۳	۰/۲۶۷	۱/۰۰۰	۱/۰۳۵
نامزد ۳	۱/۲	۳	۱	۰/۶۳۳	۲/۳۶۸	۲/۴۵۱
نسبت سازگاری $CR=۰/۰۴۶۲$ و $\beta=۳/۳۳۳$						
مقایسه‌های دو به دوی سه نامزد نسبت به معیار $C_۲$						
نامزد ۱	۱	۱/۲	۱/۲	۰/۴۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۷۷
نامزد ۲	۲	۱	۱/۲	۰/۶۳۳	۱/۵۷۹	۱/۷۰۱
نامزد ۳	۲	۲	۱	۱/۰۰۰	۲/۵۰۰	۲/۶۹۳
نسبت سازگاری $CR=۰/۰۴۶۲$ و $\beta=۳/۲$						
مقایسه‌های دو به دوی سه نامزد نسبت به معیار $C_۳$						
نامزد ۱	۱	۱/۴	۱	۰/۲۵۰	۱/۰۰۰	۱/۰۳۱
نامزد ۲	۴	۱	۴	۱/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۱۲۳
نامزد ۳	۱	۱/۴	۱	۰/۲۵۰	۱/۰۰۰	۱/۰۳۱
نسبت سازگاری $CR=۰$ و $\beta=۳$						
مقایسه‌های دو به دوی سه نامزد نسبت به معیار $C_۴$						
نامزد ۱	۱	۲	۲	۱/۰۰۰	۲/۵۰۰	۲/۶۹۳
نامزد ۲	۱/۲	۱	۲	۰/۶۳۳	۱/۵۷۹	۱/۷۰۱
نامزد ۳	۱/۲	۱/۲	۱	۰/۴۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۷۷
نسبت همسازی $CR=۰/۰۴۶۲$ و $\beta=۳/۲$						

جدول ۹. تجمیع بهترین اولویت‌های محلی در جدول ۸

	معیار ۱	معیار ۲	معیار ۳	معیار ۴	اولویت‌های سراسری
اولویت‌های سراسری سه نامزد نسبت به هدف تصمیم بر اساس دیدگاه خوشبینانه					
وزن‌های محلی معیارها	۱/۰۰۰	۰/۱۳۴	۰/۳۹۵	۰/۷۳۰	
نامزد ۱	۱/۰۰۰	۰/۴۰۰	۰/۲۵۰	۱/۰۰۰	(۱)۱/۸۸۲
نامزد ۲	۰/۲۶۷	۰/۶۳۳	۱/۰۰۰	۰/۶۳۳	(۲)۱/۲۰۹
نامزد ۳	۰/۶۳۳	۱/۰۰۰	۰/۲۵۰	۰/۴۰۰	(۳) ۱/۱۵۸
اولویت‌های سراسری سه نامزد نسبت به هدف تصمیم بر اساس دیدگاه بدبینانه					
وزن‌های محلی معیارها	۷/۴۶۳	۱/۰۰۰	۲/۸۰۲	۵/۲۲۴	
نامزد ۱	۳/۷۵۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۲/۵۰۰	(۱) ۴۴/۸۴۸
نامزد ۲	۱/۰۰۰	۱/۵۷۹	۴/۰۰۰	۱/۵۷۹	(۲) ۲۸/۴۹۹
نامزد ۳	۲/۳۶۸	۲/۵۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	(۳) ۲۸/۱۹۸
رتبه‌ی سه نامزد بر اساس معادله‌ی (۷)					
نامزد ۱					(۱) ۴۴/۸۸۸
نامزد ۲					(۲) ۲۸/۵۲۴
نامزد ۳					(۳) ۲۸/۲۲۲

۵ نتیجه‌گیری

در مساله‌ی تصمیم‌گیری در AHP، وزن‌های سراسری گزینه‌ها به موجب معیارها به عنوان یک تصمیم نهایی به

دست می‌آیند. تصمیم‌گیرنده در هر جهت، مثلاً در مقایسه‌ی معیارها یا گزینه‌ها به موجب هر معیار، قضاوت‌های شهودی خود را به صورت ماتریس دو به دو بیان می‌کند. مقایسه‌های داده‌شده در هر جنبه ممکن است با یکدیگر ناسازگار باشند. در این مقاله، یک رویکرد تحلیل مرز دوگانه را برای به‌دست آوردن وزن AHP پیشنهاد کردیم. رویکرد تحلیل مرز دوگانه، وزن‌های یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو را نه تنها از دیدگاه خوشبینانه بلکه همچنین، از دیدگاه بدبینانه می‌سنجد. این روش برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی کاملاً سازگار، وزن‌های حقیقی را به دست می‌دهد، و برای ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دوی ناسازگار، وزن‌های فراگیر ولی منطقی ارایه می‌نماید. سه مثال عددی، از جمله یک کاربرد AHP برای انتخاب بهترین رئیس برای یک دانشگاه، با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که وزن‌های به‌دست آمده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه، فراگیرتر و منطقی‌تر از مطلوب‌ترین وزن‌های به‌دست آمده از روش DEAHP است. امید می‌رود که رویکرد تحلیل مرز دوگانه مسیر جدیدی را در پژوهش AHP بگشاید.

سپاس‌گزاری

مؤلفان مایل‌اند از داوران ناشناس به خاطر نظرات سازنده‌ی آن‌ها که به بهبود مقاله‌ی حاضر کمک کرد، سپاس‌گزاری کنند.

منابع

[1] Subramanian, N., & Ramanathan, R. (2012). A review of applications of Analytic Hierarchy Process in operations management. International Journal of Production Economics, 138(2), 215–241.

[2] Ishizaka, A., & Labib, A. (2011). Review of the main developments in the analytic hierarchy process. Expert Systems with Applications, 38(11), 14336–14345.

[3] Saaty, T.L. (1972). An eigenvalue allocation model for prioritization and planning. In Energy management and policy center (pp. 28–31). University of Pennsylvania.

[4] Singh, R.P., & Nachtnebel, H.P. (2016). Analytical hierarchy process (AHP) application for reinforcement of hydropower strategy in Nepal. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 55, 43–58.

[5] Štreimikiene, D., Šliogeriene, J., & Turskis, Z. (2016). Multi-criteria analysis of electricity generation technologies in Lithuania. Renewable Energy, 85, 148–156.

[6] Gdoura, K., Anane, M., & Jellali, S. (2015). Geospatial and AHP-multicriteria analyses to locate and rank suitable sites for groundwater recharge with reclaimed water. Resources, Conservation and Recycling, 104, 19–30.

[7] Kavurmaci, M., & Üstün, A.K. (2016). Assessment of groundwater quality using DEA and AHP: A case study in the Sereflikochisar region in Turkey. Environmental Monitoring and Assessment, 188(4) Article number (258).

[8] Abdollahzadeh, G., Damalas, C.A., Sharifzadeh, M.S., & Ahmadi-Gorgi, H. (2016). Selecting strategies for rice stem borer management using the Analytic Hierarchy Process (AHP). Crop Protection, 84, 27–36.

[9] Nguyen, T., & Nahavandi, S. (2016). Modified AHP for gene selection and cancer classification using type-2 fuzzy logic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 24(2), 273–287.

[10] Erdoğan, M., & Kaya, I. (2016). A combined fuzzy approach to determine the best region for a nuclear power plant in Turkey. Applied Soft Computing Journal, 39, 84–93.

[11] Chen, Y., Liu, R., Barrett, D., Gao, L., Zhou, M., Renzullo, L., Emelyanova, I. (2015). A spatial assessment framework for evaluating flood risk under extreme climates. Science of the Total Environment, 538, 512–523.

[12] Zammori, F. (2010). The analytic hierarchy and network processes: Applications to the US

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]

presidential election and to the market share of ski equipment in Italy. Applied Soft Computing, 10(4), 1001–1012.

[13] Ossadnik, W., Schinke, S., & Kaspar, R.H. (2016).Group aggregation techniques for analytic hierarchy process and analytic network process: A comparative analysis. Group Decision and Negotiation, 25(2), 421–457.

[14] Del Vasto-Terrientes, L., Valls, A., Slowinski, R., & Zielniewicz, P. (2015). ELECTRE-I- II-H: An outranking-based decision aiding method for hierarchically structured criteria. Expert Systems with Applications, 42(11), 4 910–4 926.

[15] Kainulainen, T., Leskinen, P., Korhonen, P., Haara, A., & Hujala, T. (2009). A statisti- cal approach to assessing interval scale preferences in discrete choice problems. Journal of the Operational Research Society, 60(2), 252–258.

[16] Dede, G., Kamalakis, T., & Sphicopoulos, T. (2016). Theoretical estimation of the probability of weight rank reversal in pairwise comparisons. European Journal of Operational Research, 252(2), 587–600.

[17] Ishizaka, A., & Labib, A. (2009). Analytic hierarchy process and expert choice: Benefits and limitations. OR Insight, 22(4), 201–220.

[18] Vaidya, O.S., & Kumar, S. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. European Journal of Operational Research, 169 (1), 1–29.

[19] Ho, W. (2008). Integrated analytic hierarchy process and its applications –A litera- ture review. European Journal of Operational Research, 186(1), 211–228.

[20] Ishizaka, A., & Labib, A. (2011). Review of the main developments in the analytic hierarchy process. Expert Systems with Applications, 38(11), 14336–14345.

[21] Pedrycz, W., & Song, M. (2011). Analytic Hierarchy process (AHP) in group decision making and its optimization with an allocation of information granularity. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 19(3), 527–539.

[22] Zadeh, L.A.,(1965). Fuzzy sets.Information and Control,8(3), 338-353.

[23] Nayagam, V.L.G., Jeevaraj, S., & Sivaraman, G. (2016). Total ordering defined on the set of all intuitionistic fuzzy numbers. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 30(4), 2015–2028.

[24] Mardani, A., Jusoh, A., & Zavadskas, E.K. (2015). Fuzzy multiple criteria decision–making techniques and applications - Two decades review from 1994 to 2014. Expert Systems with Applications, 42(8), 4126–4148.

[25] Wang, Y.-M., & Chin, K.-S. (2011). Fuzzy analytic hierarchy process: A logarithmic fuzzy preference programming methodology. International Journal of Approximate Reasoning, 52(4), 541–553.

[26] Saaty, T.L. (1980). The Analytic Hierarchy Process. McGraw-Hill: New York.

[27] Saaty, T.L. (1990). Eigenvector and logarithmic least squares. European Journal of Operational Research, 48(1), 156–160.

[28] Bryson, N. (1995). A goal programming method for generating priority vectors. Journal of the Operational Research Society, 46(5), 641–648.

[29] Cogger, K.O., & Yu, P.L. (1985). Eigenweight vectors and least-distance approximation for revealed preference in pairwise weight ratios. Journal of Optimization Theory and Applications, 46(4), 483–491.

[30] Wang, Y.-M., Parkan, C., & Luo, Y. (2007). Priority estimation in the AHP through maximization of correlation coefficient. Applied Mathematical Modelling, 31(12), 2711–2718.

[31] Khoshfetrat, S. (2014). Determining the priority of decision making units in the analytic hierarchy process via data envelopment analysis. Doctoral dissertation, Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran..

[32] Charnes, A., Cooper, W.W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6), 429–444.

[33] Ramanathan, R. (2006). Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process. Computers & Operations Research, 33(5), 1289–1307.

[34] Sevkli, M., Koh, S.C.L., Zaim, S., Demirbag, M., & Tatoglu, E. (2007). An application of data envelopment analytic hierarchy process for supplier selection: a case study of BEKO in Turkey. International Journal of Production Research, 45(9), 1973–2003.

[35] Wang, Y.-M., Chin, K.-S., & Leung, J.P.F. (2009). A note on the application of the data envelopment analytic hierarchy process for supplier selection. International Journal of Production Research, 47(11), 3121–3138.

[36] Wang, Y.-M., Chin, K.-S., & Poon, G.K.K. (2008). A data envelopment analysis method with

assurance region for weight generation in the analytic hierarchy process. Decision Support Systems, 45(4), 913–921.

[37] Wang, Y.-M., Parkan, C., & Luo, Y. (2008). A linear programming method for generating the most favorable weights from a pairwise comparison matrix. Computers & Operations research, 35(12), 3918–3930.

[38] Wang, Y.-M., & Chin, K.-S. (2009). A new data envelopment analysis method for priority determination and group decision making in the analytic hierarchy process. European Journal of Operational Research, 195(1), 239–250.

[39] Wang, Y. M., Chin, K. S., & Yang, J. B. (2007). Measuring the performances of decision making units using geometric average efficiency. Journal of the Operational Research Society, 58(7), 929–937.

[40] Khoshfetrat,S.;Hosseinzadeh Lotfi,F. ; Rostamy-Malkhlalifeh,M.(2014).Analytic Hierarchy Process: Obtaining weight vector with generalized weighted least square method by using Genetic Algorithm and simplex method. Journal of Applied Science and Agriculture. 9(1),211-217.

[41] Khoshfetrat, S.; Hosseinzadeh Lotfi, F,.(2014). Introducing a nonlinear programmig model and using genetic algorithm to rank the alternatives in analytic hierarchy process. Journal of Applied Research on Industrial Engineering. 1(1)12-18.

[42] Khoshfetrat,S., Hosseinzadeh Lotfi, F,. (2014). Deriving Priorities the Alternatives in an Analytic Hierarchy Process. International Journal of Research in Industrial Engineering. 3(4)13-20.

[43] Sepehrian, Z., Khoshfetrat, S., Ebadi, S,.(2021). An approach for generating weights using the pairwise comparison matrix. Journal of Mathematics. https://doi.org/10.1155/2021/3217120

[44] Fei-Fei Ye, Long-Hao Yang, Ying-Ming Wang, (2020).An interval efficiency evaluation model for air pollution management based on indicators integration and different perspectives. Journal of Cleaner Production. 245, 118945.

[45] Wenli Liu,Ying-Ming Wang.(2018). Ranking DMUs by using the upper and lower bounds of the normalized efficiency in data envelopment analysis. Computers & Industrial Engineering. 125, 135-143.

[46] Seyedreza, Seyedalizadeh Ganji, Amir Abbas, Rassafi, Samaneh, Jamshidi Bandari.(2020). Application of evidential reasoning approach and OWA operator weights in road safety evaluation considering the best and worst practice frontiers. Socio-Economic Planning Sciences. 69, 100706.

[47] Seyedalizadeh Ganji S.R., Amir A., Rassafi, Dong-LingXu.(2019). A double frontier DEA cross efficiency method aggregated by evidential reasoning approach for measuring road safety performance. Measurement. 136, 668-688.

[48] Azizi H, Hosseinzadeh H. (2020). Ranking Decision-Making Units Using Double-Frontier Analysis Approach. 17 (1),103-118.

[49] Azizi H, Bahari A, Jahed R. (2013). A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: A new approach based on double frontiers data envelopment analysis.10(1) ,99-117

[50] Jahed, R., Amirteimoori, A., & Azizi, H. (2015). Performance measurement of decision-making units under uncertainty conditions: An approach based on double frontier analysis. Measurement, 69, 264–279.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.2.4.6]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.2.93]