

مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر

قربانعلی رمضان‌نیا کشتلی^{۱*}، سید هادی ناصri^۲

۱- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات، دانشگاه مازندران، مازندران، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، مازندران، ایران

رسید مقاله: ۱۷ اسفند ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۲۵ شهریور ۱۳۹۷

چکیده

برنامه‌ریزی آرمانی خطی یکی از تکنیک‌های مهم برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه می‌باشد که برای هر هدف (آرمان) یک سطح آرزو توسط تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود. در برنامه‌ریزی آرمانی اگر چند سطح آرزوی گستته، برای آرمان‌ها درنظر گرفته شود، بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی مطرح می‌شود که اولین بار توسط چانگ در سال (۲۰۰۷) ارایه شد. چانگ در سال (۲۰۰۸) نوعی دیگر از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی به نام برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده که سطح آرزوی آرمان‌های آن، یک بازه بسته می‌باشد را مطرح نمود که ممکن است ابتدای بازه یا انتهای بازه از اهمیت خاصی برخوردار باشند. اولین مقاله چندانتخابی فازی باسطح آرزوی فازی مثلثی توسط بانکیان و همکاران در سال (۲۰۱۲) ارایه شد. در این مقاله مدل‌هایی جدید از مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده (برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر) را مورد بررسی قرار می‌دهیم و برای حل آن‌ها با استفاده از روش α -برش و در نظر گرفتن حداقل درجه عضویت‌های متفاوت برای آرمان‌ها یا قیدهای فازی انعطاف‌پذیر، آن‌ها را به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی تبدیل می‌کنیم. برای درک بیشتر مثال‌هایی عددی مطرح می‌کنیم و با روش‌های فوق آن‌ها را حل می‌کنیم.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی چندهدفه خطی، برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر.

۱ مقدمه

در ادبیات موضوع، ملاحظه می‌شود چنانچه پاره‌ای از فعالیت‌ها منوط به بهره‌گیری مشارکتی از منابع محدود باشند مطالعه تخصیص منابع و در نتیجه تعیین حجم فعالیت‌ها مطرح می‌شود. این مسایل را می‌توان با برنامه‌ریزی ریاضی مدل‌بندی کرد. اگر در مدل ریاضی مربوطه تمام روابط ریاضی از نوع توابع خطی باشند برنامه‌ریزی

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Ramzannia52@yahoo.com

مربوطه را یک برنامه‌ریزی خطی گویند. مدل‌های برنامه‌ریزی خطی عمدتاً دارای چارچوبی هستند که در آن‌ها اهداف موردنظر در قالب یک هدف عمدۀ مثلاً حداکثر کردن سود یا حداقل کردن کل هزینه‌ها خلاصه می‌شود. با توجه به محدودیت‌های موجود در برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی خطی چنددهده مطرح گردید که در این برنامه‌ریزی می‌توان چند هدف را مورد بررسی قرار داد [۱، ۲]. یکی از این تکنیک‌های کارآمد برای حل برنامه‌ریزی آرمانی می‌باشد. این برنامه‌ریزی اولین بار توسط چارنز و کوپر ارایه شد [۳] تصمیم‌گیری چنددهده، برنامه‌ریزی آرمانی می‌باشد. این برنامه‌ریزی اولین بار توسعه چارنز و کوپر ارایه شد [۴] و توسط لی [۵]، ایگنیزیو [۶]، تامیز و همکاران [۷]، رومرو [۸] و دیگران [۹] توسعه داده شد. در مدل برنامه‌ریزی آرمانی (GP) انحراف بین دستیابی آرمان‌ها و سطوح آرزوی آن‌ها را مینیمم می‌کنیم. در این روش، تصمیم‌گیرنده مقدار مورد انتظار هر هدف را در نظر می‌گیرد و در مورد نحوه مینیمم کردن متغیر انحراف مثبت از هدف یا متغیر انحراف منفی از هدف تصمیم‌گیری می‌کند. اغلب، در مسایل دنیای واقعی، تصمیم‌گیرنده قادر نیست برای هدفی مشخص در تخصیص آن (سطح آرزو) مقداری معین در نظر بگیرد. به خاطر چنین مسایلی چارنز و کلمبو [۱۰] روش برنامه‌ریزی آرمانی بازه‌ای را مطرح کردند که این مدل توسط جونز و تامیز [۱۱]، ویتوریا و همکاران [۱۲] و چانگ [۱۳] توسعه داده شد. در شرایطی ممکن است هدف‌ها دارای سطح آرزوی مبهم باشند که در این صورت برنامه‌ریزی آرمانی فازی مطرح می‌شود [۱۴، ۱۵]. همچنین اگر با مسایلی روبرو شویم که هدف‌ها دارای چند سطح آرزوی مشخص باشند، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی را خواهیم داشت که برای اولین بار توسط چانگ معرفی شد [۱۶]. در مدل معرفی شده چندسطح آرزوی گسسته برای آرمان‌ها در نظر گرفته می‌شود. نامبرده یک سال بعد مدل اصلاحی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی را برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با سطوح آرزوی پیوسته ارایه نمود [۱۷]. مطالعات و تحقیقاتی ارزشمندی در حوزه نظری و کاربردی انجام گرفته است که به عنوان نمونه می‌توان به نحوه تبدیل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی به مسایل برنامه‌ریزی آرمانی صحیح [۱۸]، مدل‌بندی برنامه‌ریزی آرمانی چندبخشی [۱۹]، حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب [۲۰]، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با توابع کارآمد (سودمند) [۲۱]، برنامه‌ریزی آرمانی چندضرایبی در مجموعه قیود [۲۲]، اصلاح برنامه‌ریزی آرمانی چندبخشی [۲۳]، و غیره [۲۴-۲۸]، اشاره کرد. اولین پژوهش مربوط به برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی توسعه بانکیان تبریزی و همکاران [۲۹] ارایه شد که سطح آرزوی چندگانه آرمان‌ها را اعداد فازی مثلثی در نظر گرفتند و با استفاده از روش زیمرمن [۱۵] و چانگ [۱۶] آن را حل نمودند. پژوهشی دیگر توسط گاپاتا و همکاران در بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای ارایه گردید که با استفاده از تابع رتبه‌بندی مدل فازی به مدل قطعی تبدیل شد [۳۰].

در این مقاله مدل‌هایی جدید از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر معرفی می‌کنیم و با استفاده از روش α -برش و درنظر گرفتن حداقل درجه عضویت متفاوت برای قیدها یا آرمان‌ها یا آن‌ها را به حالت قطعی تبدیل می‌کنیم و با تشکیل مدل مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری متناظر با آن‌ها و حل آن، جواب بهینه (درصورت وجود) را به دست می‌آوریم. از کاربردهای برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده

فازی انعطاف‌پذیر می‌توان در بحث تحلیل و حساسیت مسایل برنامه‌ریزی آرمانی، مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی با سطح آرزوی فازی ذوزنقه‌ای و برنامه‌ریزی کشاورزی را نام برد. در این مقاله ابتدا دربخش ۲ به بررسی مدل‌هایی از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی می‌پردازیم. در بخش ۳ و ۴ به ترتیب مدل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر را معرفی می‌کنیم و نحوه قطعی‌سازی و تشکیل مدل مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری را ارایه می‌کنیم و برای بیان کارامدی و تفهیم روش‌های بیان شده مثال‌هایی عددی مطرح می‌کنیم و آن‌ها را حل می‌کنیم. دربخش آخر نتیجه‌گیری و پیشنهادات را بیان می‌کنیم.

۲ بررسی مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی

شکل کلی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی به صورت زیر می‌باشد [۱۶]

$$\begin{aligned} G_k(x) &\stackrel{\geq}{=} (g_{k1} \text{ or } g_{k2} \text{ or } \dots \text{ or } g_{kT}), k = 1, \dots, K \\ s.t. \quad AX &= b, A = \left[a_{ij} \right]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ X &= (x_1, \dots, x_n)^t, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

که برای هدف ۱-ام چند سطح آرزوی مشخص، مانند $g_{k1}, g_{k2}, \dots, g_{kT}$ در نظر گرفته می‌شود و ما می‌خواهیم انحراف مقدارهای و سطح آرزوی آن در هدف k -ام را مینیمم کنیم.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K |G_k(x) - (g_{k1} \text{ or } g_{k2} \text{ or } \dots \text{ or } g_{kT})| \\ s.t. \quad AX &= b, A = \left[a_{ij} \right]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ X &= (x_1, \dots, x_n)^t, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_j \geq 0$, $(j = 1, \dots, n)$, $A = \left[a_{ij} \right]$. با توجه به این که برای هر هدف چند سطح آرزو وجود دارد، مدل فوق به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K w_k (d_k^- + d_k^+) \\ s.t. \quad G_k(X) - d_k^+ + d_k^- &= \sum_{t=1}^T g_{kt} S_{kt}(B), \\ AX &= b, A = \left[a_{ij} \right]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ d_k^-, d_k^+ &\geq 0, x_j \geq 0, k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, n, B \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3)$$

که B یک متغیر دودویی و S_{kt} بیان‌گرتابع ضربی از متغیرهای دودویی می‌باشد که مشخص می‌کند کدام سطح آرزو برای آرمان i -ام انتخاب شود.

۱-۲ برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده [۱۷]

در روند حل مدل اولیه برنامه‌ریزی آرمانی چند انتخابی که برای سطوح آرزوی آرمان‌های آن چندانتخاب گسته مشخص وجود دارد، جملات ضربی از متغیرهای دودویی به وجود می‌آید که این در عمل مشکلاتی را برای تصمیم‌گیرنده به همراه خواهد داشت، لذا برای برطرف کردن این مشکل، از مدل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده استفاده می‌شود. یکی از مزایای روش فوق این است که شامل جملات ضربی از متغیرهای دودویی نیست و به آسانی با استفاده از نرم افزارهای موجود قابل حل است.

مدل کلی مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} G_k(X) &\geq g_{k,\min} \text{ and } \leq g_{k,\max}, \quad k = 1, \dots, K, \\ AX &= b, \quad A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ X &= (x_1, \dots, x_n)^t, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4)$$

در واقع سطح آرزوی این برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده بازه بسته $[g_{k,\min}, g_{k,\max}]$ می‌باشد.

تذکر ۱- برای حل مساله (۴) نیاز هست که مشخص شود که ابتدای بازه اهمیت یا اولویت بیشتری دارد یا انتهای بازه، سپس آن را به برنامه‌ریزی آرمانی خطی تبدیل می‌کنند.

تذکر ۲- اگر بخواهیم از سطح آرزوی در نظر گرفته شده از یک آرمان، مینیمم‌ترین آن‌ها را انتخاب کنیم مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی اصلاح شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K [w_k (d_k^- + d_k^+) + \alpha_k (e_k^- + e_k^+)] \\ \text{s.t.} \quad & G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\ & AX = b, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \quad A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n} \\ & X = (x_1, \dots, x_n)^t, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m \\ & d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad X \geq 0, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (5)$$

در مدل بالا (x) آرمان مساله، y_k سطح آرزوی در نظر گرفته شده برای آرمان k -ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله می‌باشند

تذکر ۳- اگر بخواهیم از سطح آرزوی در نظر گرفته شده از یک آرمان، ماکزیمم‌ترین آن‌ها را انتخاب کنیم مدل برنامه‌ریزی اصلاح شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\
 \text{s.t. } & G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\max}, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max}, \\
 & AX = b, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \quad A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}, \\
 & X = (x_1, \dots, x_n)^t, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad X \geq 0, \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned} \tag{6}$$

در مدل بالا (x) آرمان مساله، y_k سطح آرزوی درنظر گرفته شده برای آرمان k -ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله می‌باشند.

تذکرۀ ۴- در دنیای واقعی ممکن است بعضی از آرمان‌ها به هم وابسته باشند لذا در چنین مسائلی، از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده محدود استفاده می‌کنند که در ادامه به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

تذکرۀ ۵- مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده محدود در حالتی که مینیمم‌ترین سطح آرزو مدنظر باشد به صورت زیراست.

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\
 \text{s.t. } & (G_k(X))B_k - d_k^+ + d_k^- = B_k y_k, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\
 & AX = b, \quad A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \quad X = (x_1, \dots, x_n)^t, \quad x_j \geq 0, \\
 & B_k \in \{0, 1\}, \quad d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad X \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{7}$$

در مدل بالا (x) آرمان مساله، y_k سطح آرزوی درنظر گرفته شده برای آرمان k -ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله و B_k متغیر دودویی می‌باشند

تذکرۀ ۶- مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده محدود در حالتی که ماکریمم‌ترین سطح آرزو مدنظر هست به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\
 \text{s.t. } & (G_k(X))B_k - d_k^+ + d_k^- = B_k y_k, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\max}, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\
 & AX = b, \quad A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\
 & B_k \in \{0, 1\}, \quad d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad X \geq 0, \quad k = 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{8}$$

در مدل بالا (x) آرمان مساله، y_k سطح آرزوی درنظر گرفته شده برای آرمان k -ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله و B_k متغیر دودویی می‌باشند.

۲-۲ برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی

در برخی از مسایل، ما با چند سطح آرزوی مبهم یا نامشخص برای آرمان‌ها یا متغیرها یا ضرایب موافق می‌شویم که در این صورت برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی مطرح می‌شود که می‌توان آن را به دسته‌های زیر تقسیم کرد.

یک دسته از چنین برنامه‌ریزی‌هایی، مدل‌هایی هستند که سطوح آرزوی آن‌ها فازی مثلثی می‌باشد که این دسته از مدل‌ها توسط بانکیان تبریزی و همکاران مطرح شد [۲۹].

اگر برای آرمان k -ام (G_k)، سطوح آرزو $\tilde{g}_{k\downarrow}$ or $\tilde{g}_{k\wedge}$ or...or \tilde{g}_{kT} باشند. مدل برنامه‌ریزی آرمانی چند انتخابی فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k=1}^K |G_k(x) - (\tilde{g}_{k\downarrow} \text{ or } \tilde{g}_{k\wedge} \text{ or } \dots \text{ or } \tilde{g}_{kT})| \\ \text{s.t.} & AX = b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ & X = (x_1, \dots, x_n)^t, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

که مدل اخیر را می‌توان به صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \max f(\mu) &= \sum_{k=1}^K w_k \mu_k \\ \text{s.t.} & \mu_k \leq 1 - \sum_{t=1}^T \left(\frac{G_k(x) - \tilde{g}_{kt}}{p_{kt}^+} \right) S_{kt}(B), k = 1, \dots, K, \\ & \mu_k \leq 1 - \sum_{t=1}^T \left(\frac{\tilde{g}_{kt} - G_k(x)}{p_{kt}^-} \right) S_{kt}(B), k = 1, \dots, K, \\ & AX = b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, X = (x_1, \dots, x_n)^t \\ & \mu_k \geq 0, B \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (10)$$

تمدن -۷ p_{kt}^-, p_{kt}^+ به ترتیب بیشترین مقدار تخطی (x) از G_k از g_{kt} از سمت راست (بزرگتر شدن) و سمت چپ (کوچکتر شدن) و S_{kt} تابع ضربی از متغیرهای دودویی می‌باشد.

در بعضی از مدل‌ها متغیرها و ضرایب آن‌ها در آرمان‌ها فازی می‌باشد که مدل آن به صورت زیر بیان می‌شود
.[۳۰]

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k(\tilde{x}) &\stackrel{\geq}{=} (g_{k\downarrow} \text{ or } g_{k\wedge} \text{ or } \dots \text{ or } g_{kT}), k = 1, \dots, K \\ \text{s.t.} & A\tilde{X} \approx b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t \\ & \tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n). \end{aligned} \quad (11)$$

که برای حل آن‌ها از تابع رتبه‌بندی استفاده می‌کنیم و به صورت زیر آن را تغییر می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sum_{k=1}^K w_k (d_k^- + d_k^+) \\
 & \text{s.t.} \quad \Re(\tilde{G}_k(\tilde{X})) - d_k^+ + d_k^- = \sum_{t=1}^T g_{kt} S_{kt}(B), \\
 & \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \Re(\tilde{x}_j) = b_i, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \\
 & \quad \Re(\tilde{x}_j) \geq 0, d_k^-, d_k^+ \geq 0, k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

۳ مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر

فازی انعطاف‌پذیر از بحث‌های بسیار ارزشمند درنظریه فازی می‌باشد اگر درمسایل برنامه‌ریزی ریاضی، تصمیم‌گیرنده بخواهد میزان تخطی را درمنابع سمت راست قیدها درنظر بگیرد، دراین صورت بحث مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر مطرح می‌شود که شکل کلی مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 G_K(X) &\geq g_{k,\min} \text{ and } \leq g_{k,\max}, \quad k = 1, \dots, K, \\
 G_v(X) &\geq g_{v,\min} \text{ and } \leq g_{v,\max}, \quad v = K + 1, \dots, V, \\
 \sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j &\preceq b_l, \quad l = 1, \dots, r, \\
 \sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j &\succsim b_l, \quad l = r + 1, \dots, m \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

تذکر-۸- آرمان‌های دسته اول و دسته دوم می‌باشند و سطح آرزوی پیوسته آن‌ها می‌باشند.

تذکر-۹- در آرمان‌های دسته اول ($k = 1, \dots, K$) $G_k(X)$ رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو یا ابتدای بازه سطح آرزو ($g_{k,\min}$) اهمیت بیشتری دارد و در آرمان‌های دسته دوم ($v = K + 1, \dots, V$) $G_v(X)$ رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا انتهای بازه سطح آرزو ($g_{v,\max}$) اهمیت بیشتری دارد.

تذکر-۱۰- P_i ($i = 1, \dots, m$) میزان تخطی مقدار سمت راست قید i -ام می‌باشد که توسط تصمیم‌گیرنده به عنوان داده‌های مساله مشخص می‌شود و r قید اول که از نوع " \preceq " می‌باشد را قیود نوع اول ($l_1 = 1, \dots, r$) و مابقی که از نوع " \succsim " را قیود نوع دوم ($l_2 = r + 1, \dots, m$) می‌نامیم.

تذکر-۱۱- انعطاف‌پذیری در r -قیداول (\preceq) باعث می‌شود که منابع سمت راست از $b_{l_1} + p_{l_1}$ تا b_{l_1} قابل افزایش باشد و در بقیه قیدها (\succsim) منابع سمت راست از $b_{l_2} - p_{l_2}$ تا b_{l_2} قابل کاهش خواهد بود.

تذکر-۱۲- برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر بالا (۱۳) نیاز است که ابتدا آنرا به یک برنامه‌ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر تبدیل کنیم

سپس با استفاده از روش α -برش و درنظرگرفتن حداقل درجه عضویت متفاوت برای قیود فازی انعطاف‌پذیر، آن را به یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی قطعی چندپارامتری تبدیل کنیم.

۳-۱ تبدیل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر به برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر

باتوجه به بخش ۱-۲ برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده بالا (۱۳) نیاز هست که ابتدا آنرا به یک برنامه‌ریزی آرمانی خطی با قیود فازی انعطاف‌پذیر تبدیل کنیم. از طرفی می‌دانیم در آرمان‌های دسته اول ($k = 1, \dots, K$) $G_k(X)$ رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو ($g_{k,\min}$) و در آرمان‌های دسته دوم ($v = K+1, \dots, V$) $G_v(X)$ رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا انتهای بازه سطح آرزو ($g_{v,\max}$) اهمیت بیشتری دارد. بنابراین باتوجه به مدل (۷) و (۸) مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر متناظر با مساله (۱۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min & \left(\sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] + \sum_{v=K+1}^V [w_v(d_v^- + d_v^+) + \alpha_v(e_v^- + e_v^+)] \right) \\ \text{s.t.} & G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\ & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, k = 1, \dots, K, \\ & G_v(X) - d_v^+ + d_v^- = y_v, g_{v,\min} \leq y_v \leq g_{v,\max}, \\ & y_v - e_v^+ + e_v^- = g_{v,\max}, v = K+1, \dots, V, \\ & \sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j \stackrel{F}{\sim} b_l, l = 1, \dots, r, \quad \sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j \stackrel{F}{\sim} b_{l'}, l' = r+1, \dots, m, \\ & X = (x_1, \dots, x_n), x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

تذکر ۱۳- در مدل متغیرها به صورت زیر معرفی می‌شوند
 $d_k^-, d_k^+, e_k^-, e_k^+$ متغیرهای انحراف از آرمان، آرمان‌های دسته اول و $d_v^-, d_v^+, e_v^-, e_v^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته دوم می‌باشند و $w_k, \alpha_k, w_v, \alpha_v$ وزن آن‌ها در تابع هدف مساله (۱۴) می‌باشد.
۲- سطح آرزوی آرمان‌های دسته اول و $g_{v,\min}, g_{v,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته دوم می‌باشد

۳- مقدار سطح آرزویی هستند که بعد از حل مساله برای آرمان‌های مساله درنظرگرفته می‌شود.
در مدل مساله (۱۴) قیود از نوع فازی انعطاف‌پذیرخواهند بود که نیاز است به حالت قطعی تبدیل شوند.

۳-۲ تابع عضویت قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله (۱۴)

باتوجه به نوع قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله و میزان تخطی مربوط به هر قید، تابع عضویت قیدها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mu\left(\sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j \lesssim b_{l_i}\right) &= \frac{b_{l_i} - \sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j}{P_{l_i}} + 1, l_i = 1, \dots, r \\ \mu\left(\sum_{j=1}^n a_{l_r,j} x_j \gtrsim b_{l_r}\right) &= \frac{\sum_{j=1}^n a_{l_r,j} x_j - b_{l_r}}{P_{l_r}} + 1, l_r = r+1, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

۳-۳ تبدیل قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله (۱۴) به حالت قطعی

اگر روش α -برش را برای قطعی‌سازی قیود فازی انعطاف‌پذیر در نظر بگیریم و حداقل مقدار عضویت قیود نوع اول را α_{l_i} و قیود نوع دوم را α_{l_r} در نظر بگیریم آنگاه قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله (۱۳) به صورت زیر به حالت قطعی تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} \mu\left(\sum_{j=1}^n a_{l_i,j} x_j \lesssim b_{l_i}\right) &= \frac{b_{l_i} - \sum_{j=1}^n a_{l_i,j} x_j}{P_{l_i}} + 1 \geq \alpha_{l_i}, \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{l_i,j} x_j \leq b_{l_i} + p_{l_i}(1 - \alpha_{l_i}), l_i = 1, \dots, r, \\ \mu\left(\sum_{j=1}^n a_{l_r,j} x_j \gtrsim b_{l_r}\right) &= \frac{\sum_{j=1}^n a_{l_r,j} x_j - b_{l_r}}{P_{l_r}} + 1 \geq \alpha_{l_r} \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{l_r,j} x_j \leq b_{l_r} + p_{l_r}(1 - \alpha_{l_r}), l_r = r+1, \dots, m \end{aligned} \quad (16)$$

۳-۴ تبدیل مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر (۱۴) به یک مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی قطعی

با توجه به روابط (۱۵) و (۱۶) مدل قطعی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر (۱۳) به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + w_k'(e_k^- + e_k^+)] + \sum_{v=K+1}^V [w_v(d_v^- + d_v^+) + w_v'(e_v^- + e_v^+)] - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right) \\ \text{s.t.} \quad & G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\ & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \quad k = 1, \dots, K, \\ & G_v(X) - d_v^+ + d_v^- = y_v, \quad g_{v,\min} \leq y_v \leq g_{v,\max} \\ & y_v - e_v^+ + e_v^- = g_{v,\max}, \quad v = K+1, \dots, V, \\ & \sum_{j=1}^n a_{l_i,j} x_j \leq b_{l_i} + p_{l_i}(1 - \alpha_{l_i}), \quad l_i = 1, \dots, r, \\ & \sum_{j=1}^n a_{l_r,j} x_j \geq b_{l_r} - p_{l_r}(1 - \alpha_{l_r}), \quad l_r = r+1, \dots, m, \\ & \alpha_{l_i} \leq 1, \quad l_i = 1, \dots, r, \\ & \alpha_{l_r} \leq 1, \quad l_r = r+1, \dots, m, \\ & X = (x_1, \dots, x_n), x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (17)$$

- تذکرہ ۱۴- ملاحظہ می شود کہ مدل (۱۷) یک نوع مدل برنامہ‌ریزی آرمانی خطی چند پارامتری قطعی می باشد کہ متغیرہای آن به صورت زیر معرفی می شوند
- $d_k^-, d_k^+, e_k^-, e_k^+$ متغیرہای انحراف از آرمان دسته اول و $d_v^-, d_v^+, e_v^-, e_v^+$ متغیرہای انحراف از آرمان دسته دوم می باشد و $w_k, \alpha_k, w_v, \alpha_v$ وزن آن‌ها در تابع هدف مسالہ (۱۶) می باشد.
- ۲ سطح آرزوی آرمان‌های دسته اول و $g_{v,\min}, g_{v,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته دوم می باشد
- ۳ مقدار سطح آرزوی که بعد از حل مساله برای آرمان‌های مساله در نظر گرفته می شود.
- ۴ حداقل مقدار عضویت قیود نوع اول و α_1 حداقل مقدار عضویت قیود نوع دوم می باشد

۵-۳ مثال عددی

اگر در مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده زیر، در هدف اول رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو و در هدف دوم رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو مدنظر تصمیم گیرنده باشد و میزان تخطی قیود مساله از مقادیر سمت راستشان به ترتیب $p_3 = 7, p_2 = 2, p_1 = 8$ باشد جواب بهینه مساله در صورت وجود تخمین زده می شود.

$$\begin{aligned} G_1 : & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 100 \text{ and } \leq 120 \\ G_2 : & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 90 \text{ and } \leq 100 \\ & x_3 - 2x_2 + x_1 \geq F 15 \\ & 2x_1 - x_2 \geq F 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq F 25 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

قدم اول: با استفاده از مدل (۱۷)، مدل قطعی مساله (۱۸) که یک مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی چند پارامتری است به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \min Z = & d_1^+ + d_1^- + e_1^+ + e_1^- + d_2^+ + d_2^- + e_2^+ + e_2^- - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ s.t. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - d_1^+ + d_1^- = y_1, \\ & 100 \leq y_1 \leq 120, y_1 - e_1^+ + e_1^- = 120. \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - d_2^+ + d_2^- = y_2 \\ & 90 \leq y_2 \leq 100, y_2 - e_2^+ + e_2^- = 90. \\ & x_3 - 2x_2 + x_1 \geq 15 - \lambda(1 - \alpha_1) \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4 + 2(1 - \alpha_2) \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 25 + 7(1 - \alpha_3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_2 \leq 1, 0 \leq \alpha_3 \leq 1 \\ & d_1^+ \geq 0, d_1^- \geq 0, e_1^+ \geq 0, e_1^- \geq 0, d_2^+ \geq 0, d_2^- \geq 0, e_2^+ \geq 0, e_2^- \geq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

قدم دوم: با حل مساله با کمک نرم افزار جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} d_1^+ = 0, d_1^- = 42, e_1^+ = 0, e_1^- = 20, d_2^+ = 0, e_2^+ = 0, e_2^- = 0, y_1 = 100, y_2 = 90 \\ \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0/9166667, \alpha_3 = 0, x_1 = 10/666667, x_2 = 5/666667, x_3 = 16/1667 \end{aligned} \quad (20)$$

تذکر ۱۵- از جواب به دست آمده نتایج زیر به دست می‌آید

۱- برای آرمان اول، مقدار سطح آرزو برابر با ۱۰۰ و برای آرمان دوم، مقدار سطح آرزو برابر با ۹۰ در نظر گرفته شده است.

۲- مقدار آرمان اول برابر با ۵۸ و مقدار آرمان دوم برابر با ۹۰ به دست آمده است.

۳- هیچ گونه تخطی برای قید اول انجام نگرفته است ولی برای قید سوم تمام تخطی مجاز، در نظر گرفته شد.

۴- مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر

در مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده، آرمان‌ها بازه بسته خواهند بود. حال اگر براساس نظر تصمیم‌گیرنده ابتدای بازه تا اندازه‌ای قابل کاهش و انتهای بازه تا اندازه‌ای قابل افزایش باشد بحث برنامه‌ریزی آرمانی با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر مطرح می‌شود که شکل کلی این نوع مسایل به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} G_k(X) &\succeq^F g_{k,\min} \text{ and } \preceq^F g_{k,\max}, \quad k = 1, \dots, K, \\ G_v(X) &\succeq^F g_{v,\min} \text{ and } \preceq^F g_{v,\max}, \quad v = K + 1, \dots, V, \\ \sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j &\leq \text{or} \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ X &= (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (21)$$

تذکر ۱۶- آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر دسته اول و دسته دوم می‌باشند و $[g_{v,\min}, g_{v,\max}]$ و $[g_{k,\min}, g_{k,\max}]$ سطح آرزوی پیوسته فازی انعطاف‌پذیر آن‌ها می‌باشند که با در نظر گرفتن میزان تخطی ابتدا و انتهای سطح آرزوی فازی انعطاف‌پذیر قابل تغییر است.

تذکر ۱۷- در آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر دسته اول ($(k = 1, \dots, K)G_k(X)$) رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو یا ابتدای بازه سطح آرزو ($g_{k,\min}$) اهمیت بیشتری دارد و در آرمان‌های دسته دوم ($(G_v(X))$ رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا ابتدای بازه سطح آرزو ($g_{v,\max}$) اهمیت بیشتری دارد.

تذکر ۱۸- با توجه به این که آرمان‌ها مساله (۲۱) از نوع فازی انعطاف‌پذیر می‌باشند پس ابتدای بازه و انتهای بازه سطح آرزوی آرمان‌ها قابل انعطاف می‌باشند؛ بنابراین بر طبق نظر تصمیم‌گیرنده، $P_{k,\min}, P_{k,\max}$ به ترتیب میزان تخطی آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر دسته اول ($(k = 1, \dots, K)G_k(X)$) از بیشترین و کمترین مقدار سطح آرزویشان، و $P_{v,\min}, P_{v,\max}$ به ترتیب میزان تخطی آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر دسته دوم ($(G_v(X))$ از بیشترین و کمترین مقدار سطح آرزویشان می‌باشد.

تذکرہ ۱۹ - برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده فازی انعطاف‌پذیر بالا (۲۱) نیاز است که ابتدا آنرا به یک برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده قطعی تبدیل کنیم سپس آن را به یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی چندپارامتری تبدیل کنیم.

۴-۱ تبدیل آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر برنامه‌ریزی چندانتخابی اصلاح شده (۲۱) به حالت قطعی

با توجه به نوع آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر مساله و میزان تحمل مربوط به هر آرمان،تابع عضویت آرمان‌ها به صورت زیر خواهد بود:

تابع عضویت آرمان‌های دسته اول:

$$\mu(G_k \succ^F g_{k,\min}) = \frac{G_k - g_{k,\min}}{p_{k,\min}} + 1, k = 1, \dots, K \quad (22)$$

$$\mu(G_k \prec^F g_{k,\max}) = \frac{g_{k,\max} - G_k}{P_{k,\max}} + 1, k = 1, \dots, K \quad (23)$$

تابع عضویت آرمان‌های دسته دوم:

$$\mu(G_v \succ^F g_{v,\min}) = \frac{G_v - g_{v,\min}}{p_{v,\min}} + 1, v = K+1, \dots, V \quad (24)$$

$$\mu(G_v \prec^F g_{v,\max}) = \frac{g_{v,\max} - G_v}{P_{v,\max}} + 1, v = K+1, \dots, V \quad (25)$$

۴-۲ تبدیل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر به یک مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده قطعی
اگرروش α -برش رابرای قطعی سازی آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر درنظر بگیریم و حداقل مقدار عضویت آرمان‌های نوع اول را در روابط (۲۲) و (۲۳) $\alpha_k \leq \alpha_k \leq 1$ ، $\alpha_k \geq \alpha_k \geq 0$ و آرمان‌های نوع دوم را در روابط (۲۴) و (۲۵) $\alpha_v \leq \alpha_v \leq 1$ ، $\alpha_v \geq \alpha_v \geq 0$ درنظر بگیریم آنگاه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر مساله (۲۱) به صورت زیر به حالت قطعی تبدیل می‌شود

حالت قطعی آرمان‌های نوع اول:

$$\mu(G_k \succ^F g_{k,\min}) = \frac{G_k - g_{k,\min}}{p_{k,\min}} + 1 \geq \alpha_k \Rightarrow G_k \geq g_{k,\min} - p_{k,\min}(1 - \alpha_k), 0 \leq \alpha_k \leq 1, k = 1, \dots, K \quad (26)$$

$$\mu(G_k \prec^F g_{k,\max}) = \frac{g_{k,\max} - G_k}{P_{k,\max}} + 1 \geq \alpha_k \Rightarrow G_k \leq g_{k,\max} + p_{k,\max}(1 - \alpha_k), 0 \leq \alpha_k \leq 1, k = 1, \dots, K \quad (27)$$

حالت قطعی آرمان‌های نوع دوم:

$$\mu(G_v \succ^F g_{v,\min}) = \frac{G_v - g_{v,\min}}{p_{v,\min}} + 1 \geq \alpha_v \Rightarrow G_v \geq g_{v,\min} - p_{v,\min}(1 - \alpha_v), 0 \leq \alpha_v \leq 1, v = K+1, \dots, V \quad (28)$$

$$\mu(G_v \prec^F g_{v,\max}) = \frac{g_{v,\max} - G_v}{P_{v,\max}} + 1 \geq \alpha_v \Rightarrow G_v \leq g_{v,\max} + p_{v,\max}(1 - \alpha_v), 0 \leq \alpha_v \leq 1, v = K+1, \dots, V \quad (29)$$

۴-۳ حالت قطعی مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر

باتوجه به روابط بالا (۲۶-۲۷-۲۸-۲۹) شکل قطعی مساله (۲۱) به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} G_K(X) &\geq g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k) \text{ and } \leq g_{k,\max} + P_{k,\max}(1-\alpha_k), k=1, \dots, K, \\ G_v(X) &\geq g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v) \text{ and } \leq g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v), v=K+1, \dots, V, \\ \sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j &\leq or \geq b_i, i=1, \dots, m, \\ 0 \leq \alpha_k &\leq 1, 0 \leq \alpha_v \leq 1, X = (x_1, \dots, x_n), x_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (30)$$

مدل (۳۰) برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده چند پارامتری قطعی می‌باشد که بازه‌های زیر سطح آرزوی آرمان‌های آن می‌باشند $[g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k), g_{k,\max} + P_{k,\max}(1-\alpha_k)]$, $[g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v), g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v)]$. نکته: در آرمان‌های نوع اول ($k=1, \dots, K$) $G_k(X)$ رسانید به کمترین مقدار سطح آرزو $(v=K+1, \dots, V)$ $G_v(X)$ رسانید به بیشترین مقدار سطح آرزو $(g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k))$ (ابتداً بازه) و در آرمان نوع دوم $(g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v))$ (انتهای بازه) اهمیت بیشتری دارد.

۴-۴ تبدیل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده قطعی (۳۰) به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری

باتوجه به ساختار برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده (مدلهای (۵) و (۶)), مساله (۳۰) به صورت زیر به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{k=1}^K (w_k^+ d_k^+ + w_k^- d_k^- + w_k'^+ e_k^+ + w_k'^- e_k^-) + \sum_{v=K+1}^V (w_v^+ d_v^+ + w_v^- d_v^- + w_v'^+ e_v^+ + w_v'^- e_v^-) \\ G_K(X) - d_k^+ + d_k^- &= y_k, k=1, \dots, K, \\ y_k - e_k^+ + e_k^- &= g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k) \\ g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k) &\leq y_k \leq g_{k,\max} + P_{k,\max}(1-\alpha_k), \\ G_v(X) - d_v^+ + d_v^- &= y_v, v=K+1, \dots, V, \\ y_v - e_v^+ + e_v^- &= g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v), \\ g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v) &\leq y_v \leq g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v), \\ \sum_{j=1}^n a_{l,j} x_j &\leq or \geq b_i, i=1, \dots, m, \\ 0 \leq \alpha_k &\leq 1, 0 \leq \alpha_v \leq 1, X = (x_1, \dots, x_n), x_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (31)$$

ملاحظه می‌شود که مدل (۳۱) برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی می‌باشد که در واقع مدل قطعی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر (۲۱) می‌باشد و به آسانی با کمک نرم‌افزار قابل حل می‌باشد.

- تذکرہ ۲۰- ملاحظہ می شود کہ مدل (۳۱) یک نوع مدل برنامہ‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی می باشد کہ متغیرہای آن به صورت زیر معرفی می شوند
- $d_k^-, d_k^+, e_k^-, e_k^+$ متغیرہای انحراف از آرمان دسته اول و $d_v^-, d_v^+, e_v^-, e_v^+$ متغیرہای انحراف از آرمان دسته دوم می باشد و $w_k^+, w_k^-, w_k'^+, w_k'^-, w_v^+, w_v^-, w_v'^+, w_v'^-$ وزن آنها در تابع هدف مسالہ (۳۱) می باشد.
- ۱ سطح آرزوی آرمان‌های دسته اول و $g_{v,\min}, g_{v,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته دوم می باشد
- ۲ y_k, y_v مقدار سطح آرزویی هستند که بعد از حل مساله برای آرمان‌های مساله در نظر گرفته می شود.
- ۳ حداقل مقدار عضویت آرمان نوع اول و α_k حداقل مقدار عضویت آرمان نوع دوم می باشد

۴- مثال عددی

در مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده زیر، میزان تخطی اولین آرمان فازی انعطاف‌پذیر، از بیشترین و کمترین سطح آرزو به ترتیب ۴۰ و ۲۰ است ($P_{1,\max} = ۴۰, P_{1,\min} = ۲۰$) و میزان تخطی دومین آرمان فازی انعطاف‌پذیر، از بیشترین و کمترین سطح آرزو به ترتیب ۳۰ و ۱۴ است ($P_{2,\max} = ۳۰, P_{2,\min} = ۱۴$) و با توجه به نظر تصمیم گیرنده در آرمان اول رسیدن به بیشترین سطح آرزو (۸۰) و در آرمان فازی انعطاف‌پذیر دوم رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو (۶۰) هدف مساله است. جواب بهینه مساله به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$\begin{aligned}
 G_1 : & x_1 + 2x_2 \lesssim^F ۲۲ \text{ and } \lesssim^F ۸۰, \\
 G_2 : & x_2 - x_1 \lesssim^F -۶۰ \text{ and } \lesssim^F -۲۲, \\
 & -5x_1 + 2x_2 \leq ۷ \\
 & -x_1 + 3x_2 \leq ۳۰ \\
 & x_1 + x_2 \leq ۹۰ \\
 & 5x_1 - x_2 \leq ۳۹۰ \\
 & -4x_1 + 7x_2 \geq ۷۹ \\
 & x_1 \geq ۰, x_2 \geq ۰,
 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

برای بدست آوردن جواب بهینه مساله ابتدا با استفاده از مدل مساله (۳۱)، مدل قطعی مساله (۳۲) را بدست می آوریم که به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\min Z &= d_1^+ + d_1^- + e_1^+ + e_1^- + d_2^+ + d_2^- + e_2^+ + e_2^- \\
x_1 + 2x_2 - d_1^+ + d_1^- &= y_1, \\
y_1 - e_1^+ + e_1^- &= 10 + 4(1 - \alpha_1), \\
22 - 2(1 - \alpha_1) &\leq y_1 \leq 10 + 4(1 - \alpha_1), \\
x_2 - x_1 - d_2^+ + d_2^- &= y_2, \\
y_2 - e_2^+ + e_2^- &= -6 - 14(1 - \alpha_2), \\
-6 - 14(1 - \alpha_2) &\leq y_2 \leq -22 + 3(1 - \alpha_2), \\
-5x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\
-x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\
x_1 + x_2 &\leq 90 \\
5x_1 - x_2 &\leq 390 \\
-4x_1 + 79x_2 &\geq 79 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, d_1^+ \geq 0, d_1^- \geq 0, e_1^+ \geq 0, e_1^- \geq 0, d_2^+ \geq 0, d_2^- \geq 0, e_2^+ \geq 0, e_2^- \geq 0, \alpha_1 \leq 1, \alpha_2 \leq 1, & \quad (33)
\end{aligned}$$

با حل مساله بالا با کمک نرم افزار جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}
d_1^+ = 0, d_1^- = 0, e_1^+ = 0, e_1^- = 0, d_2^+ = 0, d_2^- = 14, e_2^+ = 70 / 26667, e_2^- = 0, x_1 = 36, x_2 = 22, y_1 = 10, \alpha_1 = 1 \\
y_2 = 0, \alpha_2 = 0 / 266667, G_1 = 10, G_2 = -14
\end{aligned}$$

قد کو ۲۱- از جواب به دست آمده نتایج زیر حاصل می شود:

۱- برای آرمان اول، مقدار سطح آرزو برابر با ۸۰ و برای آرمان دوم، مقدار سطح آرزو برابر با ۰ در نظر گرفته شده است.

۲- مقدار آرمان اول برابر با ۸۰ و مقدار آرمان دوم برابر با ۱۴ - به دست آمده است.

۳- هیچ گونه تخطی برای آرمان اول انجام نگرفته است ولی برای آرمان دوم، تخطی انجام گرفته است.

قد کو ۲۲- اگر در مساله (۳۳) تابع هدف را به صورت زیر تغییر دهیم

$$\min Z = -d_1^+ + d_1^- - e_1^+ + e_1^- + d_2^+ - d_2^- + e_2^+ - e_2^-$$

جواب بهینه مساله (۳۳) به صورت زیر تغییر می کند

$$\begin{aligned}
d_1^+ = 78, d_1^- = 0, e_1^+ = 0, e_1^- = 58, d_2^+ = 0, d_2^- = 70, e_2^+ = 70 / 26667, e_2^- = 0, x_1 = 10, x_2 = 10, y_1 = 22, \alpha_1 = 1 \\
\alpha_2 = 0 / 266667, y_2 = 0, G_1 = 10, G_2 = -70.
\end{aligned}$$

ملاحظه می شود که در تذکر ۲۲ با تغییر ضرایب (وزن های) متغیرهای انحراف مثبت و منفی مساله (۳۳) در تابع هدف، مقدار بهینه هریک از آرمان های مساله بهتر شده است.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهاد

از آنجایی که ممکن است در مسایل برنامه‌ریزی چنددهدفه خطی با اهدافی روبرو شویم که برای هر یک از آنها چند سطح آرزو (مقدار مورد انتظار) در نظر گرفته می‌شود، لذا بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی مورد توجه قرار می‌گیرد. و اگر سطح آرزوی آرمان‌ها بازه بسته باشد بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده مطرح می‌شود. گاهی اوقات، در دنیای واقعی با مسایلی روبرو هستیم که اهداف آن‌ها یا مجموعه قیود آن‌ها از نوع فازی انعطاف‌پذیر می‌باشد. در این مقاله، دو مدل جدید از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده فازی انعطاف‌پذیر تحت عنوان‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر ارایه نموده‌ایم و با درنظر گرفتن حداقل درجه عضویت و میزان تحملی برای قیدهای فازی انعطاف‌پذیر و آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر، یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری برای آن‌ها به دست آورده‌یم. از ویژگی‌های مدل به دست آمده این است که شامل متغیرهای دودویی نمی‌باشد. برای نشان دادن کارآمدی مدل‌ها و روش‌های پیشنهادشده برای برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده فازی انعطاف‌پذیر، دو مثال عددی ارایه شده است.

قابل ذکر است برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر ابزارهای توانمندی برای تحلیل حساسیت در بحث برنامه‌ریزی آرمانی خواهد بود.

منابع

- [۱] ناصری، س. و باوندی، س.، ارایه مدلی برای حل مسایل برنامه‌ریزی تصادفی چند هدفه با استفاده ازتابع عضویت هذلولوی، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهارم، شماره چهارم (پیاپی ۵۵) زمستان ۹۶، ص ۲۱-۳۳.
- [۲] شعبانی، آ.، توکلی مقدم، ر. و حاجی آقایی کشتلی، م.، حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت تحت شرایط فازی با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری به همراه یک روش جدید نمایش جواب، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال پانزدهم، شماره چهارم (پیاپی ۵۸) زمستان ۹۷، ص ۳۵-۱۵.
- [۳] Charnes, A., Cooper, w.w., (1959), constraint programming, Management science 6, 73-79.
- [۴] Lee, S.M., (1972), Goal programming for Decision Analysis, Auerback, Philadelphia, Auerbach.
- [۵] Ignizio, J.P., (1984), Linear programming in single-and multiple –objective systems, journal of policy Analysis and Management 3(3), 477-489.
- [۶] Tamiz, M., Jones, D., Romero, C., (1998), Goal programming for Decision making: an overview of the current state –of- the- art. European journal of operation research 111, 567-581.
- [۷] Romero, C., (2001), Extended lexicographic goal programming: a unifying approach, omega 29, 63-71.
- [۸] Li, H-L., (1996), An efficient method for solving linear goal programming problem, Journal of optimization Theory and application, 90, 465-469.
- [۹] change C-T., (2004), On the mixed binary goal programming problems, Applied mathematics and computation, 159, 759-768.
- [۱۰] Pal, BB., Motiram, BN., Maulik, U., (2003), A goal programming procedure for fuzzy multi-objective linear fractional programming problem, Fuzzy set and system 139, 395-405.
- [۱۱] charnge, A., Colombo, B., (1972) Optimal stabilization policy: linear goal-interval programming models, socio-Eco plan science, 6, 431-435.
- [۱۲] Jones, DF., Tamiz., (1995), Expanding the flexibility of goal programming via preference modeling technique, omega 23, 41-48.

- [13] Vitoria no, B., Romero, C., (1999), Extended interval goal programming, journal of operation society,50,1280-1283.
- [14] change C-T., (2005), Mixed Binary interval goal programming, journal of operation society,50,1280-1283.
- [15] Zimmerman, H.J., Fuzzy programming and linear programming with several objective function, Fuzzy set and system,1,45-55.
- [16]. Chang, C.-T., (2007). Multi -choice goal programming. Omega. The International Journal of Management Science, 35: 389-396.
- [17]. Chang, C.-T. (2008). Revised multi-choice goal programming. Applied Mathematical Modelling, 32: 2587-2595.
- [18] Biswal, M.P., Acharya, S., (2009), Transformation of multi-choice linear programming problem, Applied Mathematical and computation, 210,182-188.
- [19] Liao, C.N., (2009), Formulating the multi-segment goal programming, Computer Industrial Engineering, 56,138-141.
- [20] Biswal, M.P., Acharya, S., (2011), Solving Multi-choice linear programming problems by interpolating polynomials, Mathematical computer Modelling,54,1405-1412.
- [21] Chang, C-T., (2011), Multi-choice goal programming with utility functions, European journal of operational Research 215,439-445.
- [22] Chang, T.C., Chen, M.-H., Zhuang, Y.Z., (2012), Multi-coefficient goal programming, Computer Industrial Engineering, 62,616-623.
- [23] Chang, T.C., Chen, M.-H., Zhuang, Y.Z., (2012), Revised multi-segment goal programming: present age goal programming, Computer Industrial Engineering, 63,1235-1242.
- [24] Ustun, ozden., (2012), Multi -choice goal programming formulation based on the conic secularization Applied Mathematical Modelling, 36,974-988.
- [25] Mahapatra, R.D., Roy, K.S., Biswal, P.M., (2013), Multi-choice stochastic transportation problem involving extreme value distribution, Applied Mathematical Modelling,37,2230-2240.
- [26] Panda, A., Das, B.C., (2014), Multi-choice linear programming for matrix gams, Applied Mathematical Modelling, 237,411-418.
- [27] Patro, K., Acharya, M.M., Biswal, M.P., Acharya, S., (2015), Computation a Multi -choice goal programming, Applied Mathematical and computation, 271,489-501.
- [28] Chang, T.C., (2015), Multi-choice goal programming modelling Applied Mathematical and computation, 271,489-501.
- [29] Tabrizi, B.B., Shahanaghi, K. and Jabalameli, M.S. (2012). Fuzzy multi-choice goal programming. Applied Mathematical Modelling, 36, 1415-1420.
- [30] Neha Gupta, Abdul Bari (2014). Multi-Choice Goal Programming with Trapezoidal Fuzzy Numbers. International Journal of Operations Research Vol. 11, No. 3, 082-090.