مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره اول (پیاپی ۶۰)، بهار ۹۸، ص ص ۱۲۹-۱۱۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تعمیمی بر تحلیل پوششی داده‌های نادقیق

لیلا خوش اندام [1*]
۱- استادیار، گروه ریاضی، واحد لشت نشا- زیباکنار، دانشگاه آزاد اسلامی، لشت نشا، ایران

رسید مقاله: ۱۶ آذر ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۱۲ خرداد ۱۳۹۷

چکیده
در مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، فرض بر این است که مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها معلوم و دقیق باشد؛ اما گاهی شرایطی اتفاق می‌افتد که ناچار به استفاده از مقادیری هستیم که به صورت دقیق مشخص نیستند و به صورت داده‌های ترتیبی ضعیف، ترتیبی قوی، فازی، کراندار وکراندار کسری و ... می‌باشد. مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها با حضور این‌گونه داده‌ها تبدیل به مدل‌های غیرخطی و نامحدب خواهند شد و تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌های نادقیق معرفی می‌شوند. در این تحقیق به مطالعه‌ی حالت خاصی از داده‌های نادقیق می‌پردازیم. به این صورت که در بسیاری از کاربردهای واقعی حالت‌هایی رخ می‌دهند که برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها متعلق به بازه‌ای از اعداد و برخی دیگر از آن‌ها درون مجموعه‌ای گسسته از اعداد می‌باشند. مدلی با حضور هم‌زمان این دو نوع داده‌ی نادقیق معرفی می‌شود که مدلی غیرخطی می‌باشد. سپس با استفاده از روشی این مدل غیرخطی به مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی معادل تبدیل می‌شود. همچنین کران‌های بالا و پایینی برای واحدهای عملیاتی تعریف و محاسبه می‌شود و در انتها نیز کاربردی از روش پیشنهاد شده بر روی یک مورد واقعی از بانک‌های تجاری ایران اجرا می‌شود و عملکرد و نحوه‌ی کارکرد روش پیشنهاد شده مورد سنجش و بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، داده‌های نادقیق، داده‌های بازه‌ای، داده‌های گسسته

۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی ناپارامتری ابداع شده توسط چارنز و کوپر [۱] است که برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانسی به‌کار می‌رود که چندین ورودی را برای تولید چندین خروجی مصرف می‌کنند. در مدل های کلاسیک DEA فرض بر این است که داده‌های به کار رفته به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌ها، دارای مقادیر معلوم و مشخص باشند، در حالی که در بسیاری از مسایل کاربردی عملاً با حالت‌هایی مواجه می-

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: L.khoshandam.lziau.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

شویم که داده‌ها به طور دقیق در دسترس قرار ندارند و به صورت کراندار، ترتیبی و یا داخل بازه‌ای از اعداد و یا متعلق به مجموعه‌ی گسسته‌ای از اعداد هستند. تحلیل پوششی داده‌های نادقیق (IDEA) به بررسی ارزیابی عملکرد واحدها با حضور این گونه داده‌ها می‌پردازد که موضوعی پرکاربرد در علم مدیریت و اقتصاد می‌باشد. کوک و همکاران ([۲،۳]) نوع خاصی از داده‌های مبهم را معرفی نمودند. به این صورت که روابط بین آن داده‌ها به صورت ترتیبی بیان می‌شد و هیچ گونه مقادیر دقیقی بین آن‌ها وجود نداشت؛ اما عنوان تحلیل پوششی داده‌های نادقیق اولین بار توسط کوپر، پارک و ژو [۴] مطرح گردید. ایشان تحت عنوان داده‌های نادقیق، ترکیبی از داده‌های ترتیبی و بازه‌ای را بیان نمودند و با افزودن این‌گونه داده‌ها به مدل استاندارد CCR، تکنیک جدیدی به نام تحلیل پوششی داده‌های نادقیق (IDEA) را معرفی نمودند. آن‌ها با به کار بردن دو مرحله‌ی تغییر مقیاس و تغییر متغیر، مدل غیرخطی ایجاد شده با داده‌های مبهم را به مدلی خطی تبدیل کردند. کیم و همکاران [۵] برای روشن‌شدن روش خطی‌سازی فوق و نشان دادن کاربردی از تحلیل پوششی داده‌های نادقیق، مسأله‌ی ارزیابی ۳۳ مرکز تلفن کشور کره را مورد مطالعه قرار دادند. به دلیل مشکلاتی که در روش خطی‌سازی کوپر و همکاران [۱] و کیم و همکاران [۵] وجود داشت در سال ۲۰۰۱ مقاله‌ای توسط کوپر و همکاران [۶] مطرح گردید که علاوه بر بهبود روش قبلی، روش جدیدی نیز بیان شد که در این روش به جای حل مدل غیرخطی IDEA، ابتدا داده‌های نادقیق را به داده‌های دقیق تبدیل کرده و سپس با قرار دادن داده‌های دقیق در مدل CCR، مدلی خطی را حل نمود. همچنین لی و کیم [۷] فرض کردند که در ارزیابی توسط مدل IDEA، اگر واحدی ناکارا باشد، برای تحلیل ناکارایی از اطلاعاتی نظیر مازاد در ورودی و کمبود در خروجی می‌توان استفاده کرد. دسپاتیس و اسمیلیس [۸] روش دیگری در مواجهه با داده‌های مبهم ارایه کردند. آن‌ها برای ارزیابی کارایی، مدل‌های غیرخطی IDEA را با استفاده از روشی به مدل‌های خطی استاندارد معادل تبدیل کردند. ژو [۹] نیز روشی را برای ساده‌سازی روش کوپر و همکاران [۲] بیان کردند. همچنین کائو [۱۰] یک روش برنامه‌ریزی ریاضی دو مرحله‌ای برای محاسبه‌ی کارایی دو مرحله‌ای با حضور داده‌های بازه‌ای و داده‌های ترتیبی ارایه کرد. سم پارک [۱۱] قابلیت‌های کامل‌تر محاسباتی را برای مدل‌های IDEA ارایه نمود و از طریق مطالعه‌ی دوآل، مشخصه‌ای کامل را از جواب‌های کارایی هر مدل ممکن از این دست نشان داد. در سال ۲۰۰۷ یانگ و وانگ [۱۲] عملکرد واحدهای تصمیم را با استفاده از کارایی های بازه‌ای اندازه گرفتند. ایشان بیان کردند که کارایی هر واحد در محدوده‌ی بازه‌ای اندازه‌گیری می‌شود که حد بالای آن، یک، و حد پایین آن از طریق معرفی یک واحد غیرایده‌آل مجازی تعیین می‌شود که عملکرد آن قطعاً از عملکرد هر واحد کم‌تر است. حسین عزیزی و وانگ [۱۳] با یک مثال عددی نشان دادند که مدل‌های کراندار تحلیل پوششی داده‌ها قادر به تعیین کارایی بازه‌ای برای واحدهایی که مقدار صفر را در هر خروجی خود دارند نمی‌باشد؛ لذا ایشان یک جفت مدل کراندار بهبودیافته برای غلبه بر این نقص پیشنهاد کردند و با ارایه‌ی مثالی واقعی شامل اندازه‌گیری عملکرد کشورهایی که در بازی‌های المپیک تابستانی آتن ۲۰۰۴ شرکت کردند، نشان دادند که رویکرد پیشنهادی یک روش مؤثر برای تحلیل عملکرد واقعی می‌باشد. همچنین در سال ۲۰۱۵ حسین عزیزی و همکاران [۱۴] یک روش تحلیل پوششی داده‌های نادقیق مبتنی بر متغیرهای کمکی ارایه نمودند. آن‌ها در این تحقیق از دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه کارایی

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

هر واحد را با حضور داده‌های نادقیق مورد ارزیابی قرار دادند. همچنین ایشان از اندازه‌ی مبتنی بر متغیرهای کمکی برای ارزیابی مستقیم کارایی با حضور این گونه داده‌ها استفاده کردند. کاوه خلیلی و همکاران [۱۵] مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای را با حضور عوامل نامطلوب برای ارزیابی عملکرد نیروگاه‌های سیکل ترکیبی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۸ عادل حاتمی و همکاران [۱۶] بازده به مقیاس را در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق ایشان ناحیه‌ی پایداری از طبقه‌بندی بازده به مقیاس را با حضور داده‌های بازه‌ای ارایه کردند و سپس با بیان مثالی، روش پیشنهادی خود را تحلیل نمودند. مهدی طلوع و همکاران [۱۷] از عواملی با نقش دوگانه در تحلیل پوششی داده‌های نادقیق استفاده کردند. تمرکز آن‌ها بر داده‌های بازه‌ای بود. ایشان ابتدا یک جفت مدل برای تعیین کران‌های بالا و پایین اندازه‌ی کارایی نسبی برای هر واحد تصمیم‌گیرنده و با حضور داده‌های بازه‌ای ارایه کردند و سپس یک مدل برای به دست آوردن کارایی بازه‌ای برای واحدهایی ارایه کردند که عواملی با نقش دوگانه‌ی یکسان دارند. آن‌ها کاربرد مدل‌های پیشنهادی خود را بر روی مجموعه‌ای از داده‌های ۲۰ بانک اجرا و تجزیه و تحلیل نمودند. تا کنون محققان زیادی در این زمینه مطالعه نموده‌اند. در بسیاری از مطالعات کاربردی با مواردی مواجه می‌شویم که برخی از متغیرهای ورودی و خروجی، متعلق به بازه و همچنین مجموعه‌ی گسسته‌ای از اعداد هستند. در این مقاله به بررسی کارایی واحدهایی پرداخته می‌شود که برخی از ورودی‌ها و خروجی‌هایشان شامل داده‌های نادقیق بازه‌ای و برخی دیگر گسسته می‌باشند. برای ارزیابی عملکرد این گونه واحدها، در بخش دوم، مدلی غیرخطی پیشنهاد و سپس با استفاده از تغییراتی، این مدل تبدیل به یک مدل ترکیبی صحیح و خطی می‌شود. در بخش سوم و چهارم به ترتیب داده‌های گسسته و داده‌های بازه‌ای معرفی می‌شوند. در بخش پنجم توسیعی از مدل پیشنهادی بیان می‌گردد. در بخش ششم، مدل‌هایی ارایه می‌شود که کارایی واحد تحت ارزیابی را با وجود داده‌های نادقیق، یک بار در خوشبینانه‌ترین حالت و یک بار در بدبینانه‌ترین حالت تخمین می‌زند و از این طریق کران‌های بالا و پایینی برای کارایی به دست می‌آورد و سپس با توجه به نتایج حاصل، واحدهای تحت بررسی از منظر کارایی در سه مجموعهٔ مجزا طبقه‌بندی می‌شود. در بخش هفت، مدل‌های پیشنهادی بر روی داده‌های مستخرج از یکی از بانک‌های ایران اجرا و نتایج و تحلیل داده‌ها به طور مبسوط بیان می‌شود. در نهایت نتیجه‌گیری در بخش آخر بیان می‌شود.

۲ مدل پیشنهادی برای داده‌های نادقیق

n واحد تصمیم‌گیرنده DMU_j، $(j=1,...,n)$، که خروجی‌های y_{rj}، $(r=1,...,s)$ را با مصرف ورودی‌های x_{ij}، $(i=1,...,m)$ تولید می‌کند در نظر می‌گیریم. برخلاف تحلیل پوششی داده‌های استاندارد فرض می‌کنیم مقادیری که برای ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده شده است نادقیق باشد. فرض کنیم دو نوع داده‌ی نادقیق به طور همزمان وجود دارد: داده‌های بازه‌ای و داده‌های با مقادیر گسسته.

مجموعه‌ی اندیس ورودی‌ها و خروجی‌ها را به ترتیب به صورت $I=I^I \bigcup I^D$، $O=O^I \bigcup O^D$ در نظر می‌گیریم که در آن I^I، O^I به ترتیب مجموعه‌ی اندیس ورودی‌ها و خروجی‌های از نوع بازه‌ای و I^D، O^D به

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

ترتیب مجموعه‌ی اندیس ورودی‌ها و خروجی‌های از نوع گسسته می‌باشد. وقتی DMU_o، واحد تحت ارزیابی باشد، آنگاه مدل زیر می‌تواند برای ارزیابی این واحد به کار برده شود:

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & \sum_{r\in O^I} u_r y_{ro} + \sum_{r\in O^D} u_r y_{ro} \\
s.t.\quad & \sum_{i\in I^I} v_i x_{io} + \sum_{i\in I^D} v_i x_{io} = ۱, \\
& \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj} + \sum_{r\in O^D} u_r y_{rj} - \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij} + \sum_{i\in I^D} v_i x_{ij} \le ۰, \qquad j = ۱,\ldots,n, \\
& v_i \ge ۰, \qquad i = ۱,\ldots,m, \\
& u_r \ge ۰, \qquad r = ۱,\ldots,s.
\end{aligned} \tag{۱}$$

در مدل فوق u_r , v_i متغیرهای تصمیم هستند و از آنجایی که ورودی‌ها و خروجی‌های تعریف شده دارای مقادیر نادقیق و متعلق به بازه و یا مجموعه‌ی گسسته‌ای از اعداد می‌باشند؛ بنابراین دارای مقادیر معین و مشخصی نیستند به همین دلیل به صورت متغیر در نظر گرفته می‌شوند؛ لذا کاملاً واضح است که مدل (۱) یک مدل غیرخطی می‌باشد. در ادامه روش تبدیل مدل غیرخطی (۱) به مدل خطی معادل آن بیان خواهد شد. قبل از پرداختن به روش خطی‌سازی مدل (۱) ابتدا به معرفی داده‌های نادقیق به کار رفته در این مدل یعنی داده‌های بازه-ای و داده‌های گسسته می‌پردازیم.

۳ داده‌های گسسته

نوع خاصی از داده‌های نادقیق، داده‌های گسسته می‌باشد که مقادیر دقیق آن‌ها به صورت زیر درون یک مجموعه ی گسسته از اعداد تعیین می‌شود:

$$x_{ij} \in DI_{ij} = \{x_{ij}^{(۱)}, x_{ij}^{(۲)}, \ldots, x_{ij}^{(l_i)}\}; \quad i \in I^D \quad , \quad j = ۱,\ldots,n, \tag{۲}$$

$$y_{rj} \in DO_{rj} = \{y_{rj}^{(۱)}, y_{rj}^{(۲)}, \ldots, y_{rj}^{(k_r)}\}; \quad r \in O^D \quad , \quad j = ۱,\ldots,n. \tag{۳}$$

برای تضمین شدنی بود y_{rj} , x_{ij} تغییرات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_{ij} \in DI_{ij} \;\Rightarrow\; x_{ij} = \sum_{l=۱}^{l_i} \mu_l^{(i)} x_{ij}^{(l)} \quad with \;\; ; \;\; \sum_{l=۱}^{l_i} \mu_l^{(i)} = ۱, \quad \mu_l^{(i)} \in \{۰,۱\} \tag{۴}$$

$$y_{rj} \in DO_{rj} \;\Rightarrow\; y_{rj} = \sum_{k=۱}^{k_r} \rho_k^{(r)} y_{rj}^{(k)} \quad with \;\; ; \;\; \sum_{r=۱}^{k_r} \rho_k^{(r)} = ۱, \quad \rho_k^{(r)} \in \{۰,۱\} \tag{۵}$$

با در نظر گرفتن چنین متغیرهایی، مادامی که DMU_o تحت ارزیابی می‌باشد، مدل، $\rho_k^{(r)}$ و $\mu_l^{(i)}$ را در بهترین حالت برای این واحد تعیین می‌کند. با در نظر گرفتن این تبدیل، مجموع توزین شده‌ی ورودی‌ها و مجموع توزین شده‌ی خروجی‌ها برای DMU_j در مدل (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{r\in O^I} u_r y_{rj} = \sum_{r\in O^I} \sum_{k=۱}^{k_r} u_r \rho_k^{(r)} y_{rj}^{(k)} \tag{۶}$$

$$\sum_{i\in I^I} v_i x_{io} = \sum_{i\in I^I}\sum_{l=1}^{l_i} v_i \mu_l^{(i)} x_{ij}^{(l)} \quad (۷)$$

با به کار بردن این تبدیلات، مدل (۱) همچنان یک مدل غیرخطی خواهد بود. برای برطرف شدن این مشکل قرار می‌دهیم:

$$\theta_{il} = v_i \mu_l^{(i)} \quad , \quad \varphi_{rk} = u_r \rho_k^{(r)} \quad (۸)$$

به طوری که

$$0 \le \varphi_{rk} \le M\,\rho_k^{(r)} \quad \forall r,k \quad (۹)$$

$$\varphi_{rk} \le u_r \le \varphi_{rk} + M\,(1-\rho_k^{(r)}) \quad \forall r,k \quad (۱۰)$$

$$0 \le \theta_{il} \le M\,\mu_l^{(i)} \quad \forall i,l \quad (۱۱)$$

$$\theta_{il} \le v_i \le \theta_{il} + M\,(1-\mu_l^{(i)}) \quad \forall i,l \quad (۱۲)$$

که در آن M یک عدد بسیار بزرگی می‌باشد. همچنین اگر $\rho_k^{(r)} = 0$ باشد، آنگاه $\varphi_{rk} = 0$ و اگر $\mu_l^{(i)} = 0$ باشد، آنگاه $\theta_{il} = 0$ خواهد بود.

۴ داده‌های بازه‌ای

مقادیر واقعی داده‌های بازه‌ای دورن یک بازه‌ی کراندار از اعداد به شکل زیر قرار دارند:

$$x_{ij} \in \left[x_{ij}^L, x_{ij}^U\right] \;,\; i \in I^I \;,\; y_{rj} \in \left[y_{rj}^L, y_{rj}^U\right] \;,\; r \in O^I \;,\; j = 1,\dots,n \quad (۱۳)$$

به طوری که کران‌های بالا و پایین این بازه‌ها ثابت و مثبت فرض شده‌است. دسپاتیس و اسمیرلیس [۸] تغییر متغیر زیر را بر روی متغیرهای $\left(i\in I^I\right)x_{ij}, y_{rj}, \left(r\in O^I\right)$ به کار بردند:

$$x_{ij} = x_{ij}^L + s_{ij}(x_{ij}^L - x_{ij}^U) \quad i=1,\dots,m,\; j=1,\dots,n, \quad with \quad 0 \le s_{ij} \le 1 \quad (۱۴)$$

$$y_{rj} = y_{rj}^L + t_{rj}(y_{rj}^L - y_{rj}^U) \quad r=1,\dots,s,\; j=1,\dots,n, \quad with \quad 0 \le t_{rj} \le 1 \quad (۱۵)$$

با این تغییرات داریم:

$$\sum_{i\in I^I} v_i x_{ij} = \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij}^L + s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L) = \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij}^L + v_i s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L) = \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij}^L + \bar{v}_i(x_{ij}^U - x_{ij}^L) \quad (۱۶)$$

$$\sum_{r\in O^I} u_r y_{rj} = \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj}^L + t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L) = \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj}^L + u_r t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L) = \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj}^L + \bar{u}_r(y_{rj}^U - y_{rj}^L) \quad (۱۷)$$

که در آن $v_i s_{ij} = \bar{v}_{ij}$ و $u_r t_{rj} = \bar{u}_r$. همچنین واضح است که به ازای هر i, r $\bar{u}_r \le u_r$ ، $\bar{v}_{ij} \le v_i$. حال با معرفی داده‌های بازه‌ای و داده‌های گسسته، به معرفی مدل توسعه‌یافته و پیشنهادی با حضور همزمان این دو نوع داده‌ی نادقیق می‌پردازیم.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

۵ توسعه‌ی مدل پیشنهادی

اگر تبدیلات بیان شده در بخش‌های (۳) و (۴) را روی مدل (۱) اعمال کنیم یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح مختلط به شکل زیر خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
e_o^* = Max \quad & \sum_{r\in O^I}\sum_{k=1}^{k_r}\varphi_{rk}y_{ro}^{(k)} + \sum_{r\in O^I}u_r y_{ro}^L + \bar{u}_r(y_{ro}^U - y_{ro}^L) \\
s.t. \quad & \sum_{i\in I^I}\sum_{l=1}^{l_i}\theta_{il}x_{io}^{(l)} + \sum_{i\in I^I}v_i x_{io}^L + \bar{v}_i(x_{io}^U - x_{io}^L) = 1, \\
& \sum_{r\in O^I}\sum_{k=1}^{k_r}\varphi_{rk}y_{ro}^{(k)} + \sum_{r\in O^I}u_r y_{rj}^L + \bar{u}_r(y_{rj}^U - y_{rj}^L) - \\
& \sum_{i\in I^I}\sum_{l=1}^{l_i}\theta_{il}x_{ij}^{(l)} + \sum_{i\in I^I}v_i x_{ij}^L + \bar{v}_i(x_{ij}^U - x_{ij}^L) \le 0,\ j=1,\dots,n, \\
& 0 \le \varphi_{rk} \le M\rho_k^{(r)}, && r\in O^D, k=1,\dots,k_r, \\
& \varphi_{rk} \le u_r \le \varphi_{rk} + M(1-\rho_k^{(r)}), && r\in O^D, k=1,\dots,k_r, \\
& 0 \le \theta_{il} \le M\mu_l^{(i)}, && i\in I^D, l=1,\dots,l_i, \\
& \theta_{il} \le v_i \le \theta_{il} + M(1-\mu_l^{(i)}), && i\in I^D, l=1,\dots,l_i, \\
& \sum_{k=1}^{k_r}\rho_k^{(r)} = 1, && r\in O^D, \\
& \sum_{l=1}^{l_i}\mu_l^{(i)} = 1, && i\in I^D, \\
& v_i \ge \bar{v}_i, && i=1,\dots,m, \\
& u_r \ge \bar{u}_r, && r=1,\dots,s, \\
& \rho_k^{(r)}, \mu_l^{(i)} \in \{0,1\} && \text{for all } i,r,k,l, \\
& \varphi_{rk},\theta_{il},u_r,v_i,\bar{v}_i,\bar{u}_r \ge 0 && \text{for all } i,r,k,l.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

بعد از اینکه جواب های بهینه‌ی $\varphi_{rk},\theta_{il},u_r,v_i,\bar{u}_r,\bar{v}_i$ از حل مدل (۱۸) به‌دست آمد، مقدار بهینه برای x_{ij} و y_{rj} تعیین می‌شود. مدل استاندارد CCR با مقادیر دقیق ورودی و خروجی، حالت خاصی از مدل (۱) می‌باشد. در واقع وقتی مجموعه‌های DI_{ij} و DO_{rj} مجموعه‌های تک عضوی باشند مدل پیشنهاد شده‌ی (۱) همان مدل CCR خواهد بود.

تعریف : DMU_o کارا گفته می‌شود اگر و فقط اگر $e_o^* = 1$ باشد.

۶ کران‌های بالا و پایین از کارایی

بر طبق کائو [۱۰]، وقتی داده‌ها نادقیق باشند امتیازات کارایی به‌دست آمده از چنین داده‌هایی نیز باید به صورت نادقیق بیان شود. به عبارت دیگر امتیازات کارایی به جای این‌که به صورت دقیق بیان شود باید درون بازه‌ای از اعداد به‌دست آید. کران بالای کارایی واحد تحت ارزیابی DMU_o با حل مدل زیر به‌دست می‌آید:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

$$e_o^{(U)} = \underset{\substack{x_{ij}^L \le x_{ij} \le x_{ij}^U \\ y_{rj}^L \le y_{rj} \le y_{rj}^U \\ x_{ij} \in DI_{ij} \\ y_{rj} \in DO_{rj} \\ j=1,\ldots,n}}{Max} \begin{cases} \underset{u_r, v_i \ge 0}{Max} \sum_{r \in O^D} u_r \ y_{ro} + \sum_{r \in O^I} u_r y_{ro} \\ s.t. \\ \sum_{i \in I^D} v_i x_{io} + \sum_{i \in I^I} v_i x_{io} = 1, \\ \sum_{r \in O^D} u_r \ y_{rj} + \sum_{r \in O^I} u_r y_{rj} - \sum_{i \in I^D} v_i x_{ij} - \sum_{i \in I^I} v_i x_{ij} \le 0, \ j = 1, \ldots, n, \\ u_r, v_i \ge 0 \ , \ \ for \ all \ i, r. \end{cases} \qquad (۱۹)$$

قسمت دوم مدل (۱۹) امتیاز کارایی را برای هر x_{ij} و y_{rj} محاسبه و قسمت اول مدل، سطوحی از x_{ij} و y_{rj} ای را تعیین می‌کند که بالاترین اندازه‌ی کارایی را تولید می‌کنند.

مقدار تابع هدفی که از این مدل به‌دست می‌آید کران بالایی برای کارایی واحد تحت ارزیابی DMU_o می‌باشد.

قضیه ۱ مقدار بهینه‌ی برنامه‌ی داخلی از مدل (۷) می‌تواند به صورت زیر تعیین شود:

$$y_{ro} = y_{ro}^U : \ r \in O^I \ , \ \ x_{io} = x_{io}^L : \ i \in I^I \qquad for \quad DMU_o \qquad (۲۰)$$

$$y_{rj} = y_{rj}^L : \ r \in O^I \ , \ \ x_{ij} = x_{ij}^U \ : \ i \in I^I \qquad for \quad DMU_j \ : \ j \ne o \qquad (۲۱)$$

$$y_{ro} = \underset{1 \le k \le k_r}{Max} \ \{ y_{ro}^{(k)} \} : \ r \in O^D, \ x_{io} = \underset{1 \le l \le l_i}{Min} \{ x_{io}^{(l)} \} : \ i \in I^D \qquad for \quad DMU_o \qquad (۲۲)$$

$$y_{rj} = \underset{1 \le k \le k_r}{Min} \{ y_{rj}^{(k)} \} : \ r \in O^D, \ x_{ij} = \underset{1 \le l \le l_i}{Max} \ \{ x_{ij}^{(l)} \} : \ i \in I^D \qquad for \quad DMU_j \ : \ j \ne o \ . \qquad (۲۳)$$

برهان: مدل CCR کسری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} & Max \quad \frac{\sum_{r \in O^I} u_r y_{ro} + \sum_{r \in O^D} u_r y_{ro}}{\sum_{i \in I^I} v_i x_{io} + \sum_{i \in I^D} v_i x_{io}} \\ & s.t. \qquad \frac{\sum_{r \in O^I} u_r y_{ro} + \sum_{r \in O^D} u_r y_{ro}}{\sum_{i \in I^I} v_i x_{io} + \sum_{i \in I^D} v_i x_{io}} \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & \qquad\quad x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U], \ \ i \in I^I, \ j = 1, \ldots, n, \\ & \qquad\quad y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U], \ \ r \in O^I, \ j = 1, \ldots, n, \\ & \qquad\quad x_{ij} \in \ DI_{ij}, \ \ i \in I^D \ and \ \ j = 1, \ldots, n, \\ & \qquad\quad y_{rj} \in \ DO_{rj}, \ r \in O^D \ and \ \ j = 1, \ldots, n, \\ & \qquad\quad u_r, v_i \ \ \ge 0 \ , \qquad for \ all \ i, \ r. \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

حال فرض کنیم که مقدار بهینه مدل (۲۴) برابر y_{rj}^* و x_{ij}^* برای $DMU_j \ : \ j \ne o$ به طوری باشد که:

$$y_{rj}^L < y_{rj}^* \le y_{rj}^U : \ r \in O^I \ , x_{ij}^L \le x_{ij}^* < x_{ij}^U \ : \ i \in I^I \ , \qquad (۲۵)$$

$$y_{rj}^* > \underset{1 \le k \le k_r}{Min} \ \{ y_{rj}^{(k)} \} , \ \ r \in O^D, x_{ij}^* < \underset{1 \le l \le l_i}{Max} \ \{ x_{ij}^{(l)} \} , \ \ i \in I^D. \qquad (۲۶)$$

بنابراین:

$$\frac{\sum_{r\in O^I} u_r y^*_{rj} + \sum_{r\in O^D} u_r y^*_{rj}}{\sum_{i\in I^I} v_i x^*_{ij} + \sum_{i\in I^D} v_i x^*_{ij}} > \frac{\sum_{r\in O^I} u_r y^L_{rj} + \sum_{r\in O^D} u_r \underset{1\le k\le k_r}{Min}\{ y^{(k)}_{rj} \}}{\sum_{i\in I^I} v_i x^U_{ij} + \sum_{i\in I^D} v_i \underset{1\le l\le l_i}{Max}\{ x^{(l)}_{ij} \}}, \quad j\neq o, \qquad (۲۷)$$

و این به این معناست که:

$$x_{ij} = x^U_{ij} : i\in I^I,\ y_{rj} = y^L_{rj} : r\in O^I,\ y_{rj} = \underset{1\le k\le k_r}{Min}\{ y^{(k)}_{rj}\},\ r\in O^D, x_{ij} = \underset{1\le l\le l_i}{Max}\{ x^{(l)}_{ij}\},\ i\in I^D$$

برای مدل (۲۴) شدنی هستند. سپس فرض می‌کنیم مقدار بهینه‌ی مدل (۲۴) برای DMU_o، برابر y^*_{ro} و x^*_{io} می‌باشد به طوری که:

$$y^L_{ro} \le y^*_{ro} < y^U_{ro} : r\in O^I, x^L_{ij} < x^*_{ij} \le x^U_{ij} : i\in I^I, \qquad (۲۸)$$

$$y^*_{ro} < \underset{1\le k\le k_r}{Max}\{ y^{(k)}_{ro}\},\ r\in O^D, x^*_{io} > \underset{1\le l\le l_i}{Min}\{ x^{(l)}_{ij}\},\ i\in I^D. \qquad (۲۹)$$

بنابراین :

$$e^{(U)}_o = \frac{\sum_{r\in O^I} u_r y^*_{ro} + \sum_{r\in O^D} u_r y^*_{ro}}{\sum_{i\in I^I} v_i x^*_{io} + \sum_{i\in I^D} v_i x^*_{io}} < \frac{\sum_{r\in O^I} u_r y^U_{ro} + \sum_{r\in O^D} u_r \underset{1\le k\le k_r}{Max}\{ y^{(k)}_{ro} \}}{\sum_{i\in I^I} v_i x^L_{io} + \sum_{i\in I^D} v_i \underset{1\le l\le l_i}{Min}\{ x^{(l)}_{io} \}} \qquad (۳۰)$$

و این یک تناقض با فرض است؛ بنابراین اثبات کامل است.

بر طبق قضیه‌ی ۱ مدل غیرخطی (۷) می‌تواند به صورت مدل زیر برای محاسبه کران بالای کارایی بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} e^{(U)}_o = Max \quad & \sum_{r\in O^D} u_r .\underset{1\le k\le k_r}{Max}\{y^{(k)}_{ro}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y^U_{ro} \\ s.t. \quad & \sum_{i\in I^D} v_i .\underset{1\le l\le l_i}{Min}\{x^{(l)}_{io}\} + \sum_{i\in I^D} v_i x^L_{io} = 1, \\ & \sum_{r\in O^D} u_r .\underset{1\le k\le k_r}{Max}\{y^{(k)}_{ro}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y^U_{ro} - \sum_{i\in I^D} v_i .\underset{1\le l\le l_i}{Min}\{x^{(l)}_{io}\} - \sum_{i\in I^D} v_i x^L_{io} \le 0, \\ & \sum_{r\in O^D} u_r .\underset{1\le k\le k_r}{Min}\{y^{(k)}_{rj}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y^L_{rj} - \sum_{i\in I^D} v_i .\underset{1\le l\le l_i}{Max}\{x^{(l)}_{ij}\} - \sum_{i\in I^D} v_i x^U_{ij} \le 0,\ j=1,\cdots,n, \\ & u_r, v_i \ge 0,\ for\ all\ i, r. \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

کران پایین کارایی برای واحد تحت بررسی DMU_o با حل مدل زیر به‌دست می‌آید:

$$e^{(L)}_o = \underset{\substack{x^L_{ij}\le x_{ij}\le x^U_{ij} \\ y^L_{rj}\le y_{rj}\le y^U_{rj} \\ x_{ij}\in DI_{ij} \\ y_{rj}\in DO_{rj} \\ j=1,\dots,n}}{Min} \left\{ \begin{aligned} & \underset{u_r, v_i\ge 0}{Max} \sum_{r\in O^D} u_r\ y_{ro} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{ro} \\ & s.t. \\ & \sum_{i\in I^D} v_i x_{io} + \sum_{i\in I^I} v_i x_{io} = 1, \\ & \sum_{r\in O^D} u_r\ y_{rj} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj} - \sum_{i\in I^D} v_i x_{ij} - \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij} \le 0,\ j=1,\dots,n, \\ & u_r, v_i \ge 0,\ for\ all\ i, r. \end{aligned} \right. \qquad (۳۲)$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

قضیه ۲ مقدار بهینه‌ی برنامه‌ی داخلی مدل (۳۲) می‌تواند به صورت زیر تعیین شود:

$$y_{ro} = y_{ro}^{L} : \ r \in O^{I} \ , \ x_{io} = x_{io}^{U} : \ i \in I^{I} \ for \quad DMU_{o} \qquad (۳۳)$$

$$y_{rj} = y_{rj}^{U} : \ r \in O^{I} \ , \ x_{ij} = x_{ij}^{L} : \ i \in I^{I} \ for \quad DMU_{j} : \ j \neq o \qquad (۳۴)$$

$$y_{ro} = \underset{۱\le k \le k_r}{Min} \{ y_{ro}^{(k)} \} : \ r \in O^{D}, \ x_{io} = \underset{۱\le l \le l_i}{Max} \{ x_{io}^{(l)} \} : \ i \in I^{D} \quad for \quad DMU_{o} \qquad (۳۵)$$

$$y_{rj} = \underset{۱\le k \le k_r}{Max} \{ y_{rj}^{(k)} \} : \ r \in O^{D}, \ x_{ij} = \underset{۱\le l \le l_i}{Min} \{ x_{ij}^{(l)} \} : \ i \in I^{D} \quad for \quad DMU_{j} : \ j \neq o \ . \qquad (۳۶)$$

برهان- اثبات مشابه قضیه‌ی ۱ می‌باشد.

با روشی مشابه قبل مدل غیرخطی (۱۰) می‌تواند با مدل خطی زیر جایگزین شود:

$$\begin{aligned}
e_o^{(L)} = Max \quad & \sum_{r\in O^D} u_r \, . \underset{۱\le k\le k_r}{Min} \{y_{ro}^{(k)}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{ro}^{L} \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i\in I^D} v_i \, . \underset{۱\le l\le l_i}{Max} \{x_{io}^{(l)}\} + \sum_{i\in I^D} v_i x_{io}^{U} = ۱, \\
& \sum_{r\in O^D} u_r \, . \underset{۱\le k\le k_r}{Min} \{y_{ro}^{(k)}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{ro}^{L} - \sum_{i\in I^D} v_i \, . \underset{۱\le l\le l_i}{Max} \{x_{io}^{(l)}\} - \sum_{i\in I^D} v_i x_{io}^{U} \le 0, \\
& \sum_{r\in O^D} u_r \, . \underset{۱\le k\le k_r}{Max} \{y_{rj}^{(k)}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj}^{U} - \sum_{i\in I^D} v_i \, . \underset{۱\le l\le l_i}{Min} \{x_{ij}^{(l)}\} - \sum_{i\in I^D} v_i x_{ij}^{L} \le 0, \ j = ۱,\cdots,n \ , \\
& u_r, v_i \ge 0 \ , \ \ for \ all \ i, r.
\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

مدل (۳۱) یک مدل با داده‌های دقیق می‌باشد به طوری که سطوح ورودی‌ها و خروجی‌ها برای واحد تحت ارزیابی در مطلوب‌ترین حالت و برای مابقی واحدها در بدترین حالت تنظیم و در مدل (۳۷) برعکس مدل (۳۱) سطوح ورودی‌ها و خروجی‌ها برای واحد تحت ارزیابی در بدترین حالت و برای مابقی واحدها در مطلوب‌ترین حالت تنظیم شده است. بر این اساس ما سه نوع دسته‌بندی را برای واحدها به صورت زیر تنظیم می‌کنیم:

$$E^{++} = \{ \ j : e_o^{P} = ۱ \} \qquad (۳۸)$$

$$E^{+} = \{ \ j : e_o^{P} < 1, e_o^{O} = ۱ \} \qquad (۳۹)$$

$$E^{-} = \{ \ j : e_o^{O} = ۱ \} \qquad (۴۰)$$

مجموعه‌ی E^{++} شامل تمام واحدهای کارایی می‌باشد که در هر شرایط کارا است. به این واحدها، واحدهای کارای کامل می‌گوییم. واحدهایی که در مجموعه‌ی E^{+} قرار دارند در حالت خوشبینانه کارا و در حالت بدبینانه ناکارا هستند. در نهایت مجموعه‌ی E^{-} شامل واحدهایی می‌شود که ناکارای کامل هستند. در بخش بعد کاربرد واقعی از مدل‌های پیشنهادشده مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند.

۷ مثال کاربردی

مدل پیشنهاد شده در این تحقیق برای محاسبه‌ی کارایی تکنیکی بر روی مجموعه‌ای از داده‌های یک بانک خصوصی در ایران اجرا شده است. بر اساس قوانین بانکداری در جمهوری اسلامی ایران، بانک ها در ایران به دو گروه تقسیم می‌شوند: بانک‌های دولتی، بانک‌های خصوصی. هرکدام از این گروه‌ها به طور جداگانه به فعالیت

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

اقتصادی درحوزه‌ی خود می‌پردازند. در این مقاله به مطالعه بر روی بانک‌های خصوصی در ایران پرداخته شده است. از دیدگاه عملیات بانک‌های خصوصی در ایران، می‌توان دریافت که سپرده‌ها و وام‌ها مورد توجه عمده آن‌ها می‌باشند و همچنین تأکید مدیریت بانک، بر جذب سپرده‌ها و سپس توزیع مطلوب سپرده‌های جذب‌شده می‌باشد. در این مقاله هر شعبه‌ی بانکی به عنوان یک واحد تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته شده است. داده‌ها از ۲۵ نمونه از شعب انتخاب شده و از عملیات طی ۱۲ ماه سال ۲۰۰۹ استفاده شده است. این ۱۲ ماه به دو دوره‌ی ۶ ماهه تقسیم شد، به طوری که هر ۶ ماه جمع‌آوری داده‌ها انجام و داده‌ها استخراج شدند. از شش متغیر از مجموعه داده‌ها، به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده شد. هر شعبه از تعدادی کارمند (x_1)، تعدادی حساب چک (x_2) و هزینه‌های عملیاتی (به استثنای هزینه‌های کارمندان) (x_3) تحت عنوان ورودی استفاده می‌کنند. همچنین سپرده‌ها (y_1)، وام‌ها (y_2) و تعداد معاملات (y_3) می‌توانند به عنوان خروجی در نظر گرفته شوند. کل داده‌های ورودی و خروجی در جدول ۱ آورده شده است. در پایان هر دوره (۶ ماه)، مقادیر مختلف داده‌ها برآورد می‌شود. از آنجایی که سپرده‌ها، وام‌ها و هزینه‌ها در یک دوره تغییر می‌کنند، اندازه‌گیری این داده‌ها از نوع نادقیق محسوب می‌شوند؛ بنابراین متغیرهای ورودی و خروجی x_3، y_1 و y_2 دارای ارزش واقعی و متعلق به بازه‌ای کراندار از اعداد هستند. همچنین متغیرهای x_1، x_2 و y_3 دارای مقادیر گسسته می‌باشند و لذا به مجموعه‌ای گسسته از اعداد تعلق دارند.

با استفاده از مدل پیشنهادی (۱۸)، چهارده شعبه، کارا ارزیابی شدند. امتیازات کارایی به دست آمده از مدل (۱۸) برای تمام شعبه‌ها در جدول ۲ آورده شده است. سومین و چهارمین ستون از جدول ۲ به ترتیب کران پایین و کران بالای بازه‌ی کارایی محاسبه شده توسط مدل‌های (۳۱) و (۳۷) را نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که شعبه‌های ۸، ۱۰، ۱۶ و ۲۳ دارای امتیار کارایی ۱ می‌باشند. نتیجه‌ای که می‌توان در اینجا گرفت این است که این چهار شعبه کارای کامل هستند. از سوی دیگر، شعبه‌های ۳، ۷، ۱۴ و ۱۹ دارای امتیاز کارایی کم‌تر از ۱ هستند؛ لذا نتیجه می‌گیریم که این چهار شعبه ناکارای کامل می‌باشند. برای تفسیر نتایج به دست آمده به عنوان نمونه، واحد ۱ را در نظر می‌گیریم. بازه‌ی کارایی این واحد $[۰/۷۰۷۷, ۱]$ و امتیاز کارایی به‌دست آمده از مدل (۶) برای آن ۰/۸۲۱۴ می‌باشد. همچنین بردار ورودی‌ها و خروجی‌ها برای این واحد

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (۱۵/۱۴, ۷۹۵, ۲۲۳۷۱۶, ۱۱۴۰۵۳۵۶۳, ۹۴۰۵۸۹۵, ۱۹۰۴۶)$$

به دست می‌آید. در این تحقیق از نرم افزار GAMS نصب شده بر روی کامپیوتر پنتیوم ۴ با حافظه ی رم ۵۱۲M و ۲GHZ استفاده شده است.

جدول ۱. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها

شعبه	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
۱	{۱۵/۱۴ و ۱۳/۱۴}	{۷۹۵ و ۷۳۷}	[۲۲۳۷۱۶, ۲۳۷۴۴۴]	[۱۱۴۰۵۳۵۶۳, ۱۳۰۷۴۸۹۹۰]	[۹۴۰۵۸۹۵۶, ۱۰۰۷۶۸۹۹۰]	{۱۹۰۴۶ و ۱۷۰۴۶}
۲	{۲۹/۷۴ و ۲۶/۸۲}	{۳۶۲ و ۲۸۱}	[۱۹۷۸۲۲, ۲۰۲۹۹۳]	[۲۲۹۶۴۷۸۵۴, ۲۴۴۱۸۹۶۸۴]	[۱۷۹۶۷۳۲۸۴, ۱۹۴۱۰۹۶۸۴]	{۱۶۵۷۶ و ۱۵۸۳۰}
۳	{۳۳/۲۵ و ۲۹/۰۷}	{۸۵۳ و ۷۴۱}	[۱۶۷۸۸۶, ۱۹۴۵۳۳]	[۱۷۲۲۰۳۷۶۱, ۱۹۴۳۹۱۲۹۸]	[۱۱۲۲۳۲۷۱, ۱۲۴۳۰۱۲۹۸]	{۱۸۷۴۴ و ۱۶۸۰۷}
۴	{۲۹/۱۲ و ۲۵/۳۱}	{۵۲۷ و ۵۱۲}	[۲۲۲۱۶۹, ۲۳۵۸۱۵]	[۱۱۸۰۲۷۶۶۴, ۱۲۸۸۸۵۸۴۰]	[۱۷۸۰۷۲۱۶۴, ۱۸۸۸۹۵۸۴۰]	{۲۳۳۵۹ و ۲۱۰۲۶}
۵	{۲۵/۵۸ و ۲۴/۳۲}	{۳۶۳ و ۲۷۳}	[۲۲۵۴۴۶, ۲۳۸۱۳۹]	[۱۸۹۵۵۵۲۶۱, ۱۹۶۲۵۴۱۴]	[۱۲۹۵۵۹۱۲۱, ۱۴۶۲۳۶۴۱۴]	{۲۲۸۰۵ و ۲۰۶۵۳}

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

{۲۱۶۳۹ و ۱۹۴۲۴}	[۱۰۴۳۳۴۵۹۳, ۱۲۴۹۵۸۹۴۲]	[۱۴۴۳۴۳۹۲۳, ۱۶۴۹۱۸۹۴۲]	[۲۱۰۷۵۰, ۲۳۶۶۵۱]	{۳۵۱ و ۲۹۸}	{۲۳/۲۴ و ۱۹/۵۴}	۶
{۱۸۲۸۴ و ۱۷۸۵۳}	[۱۳۵۵۳۰۱۲, ۱۵۹۳۱۴۷۴۱]	[۱۷۵۵۱۳۱۵۲, ۱۹۹۳۱۴۷۴۱]	[۱۹۱۹۶۰, ۲۱۳۳۲۸]	{۶۱۱ و ۵۰۵}	{۲۹/۳۸ و ۲۷/۹۶}	۷
{۲۲۲۹۹ و ۲۱۴۶۸}	[۱۶۹۷۰۱۳۵۲, ۱۷۹۵۸۱۳۹۳]	[۱۲۹۷۶۰۵۴۲, ۱۳۹۵۲۱۳۹۳]	[۱۱۲۳۹۲, ۱۳۵۳۸۳]	{۶۱۴ و ۴۳۴}	{۲۵/۰۸ و ۲۲/۴۰}	۸
{۲۲۰۶۹ و ۲۱۴۶۶}	[۱۷۵۶۷۷۷۶۹, ۱۸۵۸۱۵۲۶۸]	[۲۱۵۶۰۷۶۱۹, ۲۲۵۸۳۵۲۶۸]	[۲۶۵۴۲۴, ۲۸۱۰۷۹]	{۵۱۷ و ۴۲۲}	{۲۱/۳۴ و ۱۸/۴۷}	۹
{۲۴۶۹۳ و ۲۲۶۵۱}	[۲۲۰۶۸۹۰۷۳, ۲۴۲۹۶۵۰۴۴]	[۳۳۰۶۷۸۷۷۳, ۳۴۲۹۲۵۰۴۴]	[۲۱۴۰۹۶, ۲۲۶۸۱۴]	{۴۲۶ و ۳۳۲}	{۲۸/۷۸ و ۲۷/۳۲}	۱۰
{۱۹۲۸۹ و ۱۸۶۴۵}	[۱۰۸۵۳۲۶۴۰, ۱۲۰۴۷۴۱۱۲]	[۱۴۸۵۱۳۴۳۰, ۱۵۰۴۸۴۱۱۲]	[۱۴۴۳۳۸, ۱۶۲۴۸۳]	{۴۸۱ و ۳۲۱}	{۱۷/۲۴ و ۱۴/۶۲}	۱۱
{۲۱۲۸۹ و ۱۹۱۶۷}	[۸۷۶۶۶۲۷۲, ۹۹۹۳۹۶۸۴]	[۱۱۷۶۶۲۷۲۱, ۱۴۰۹۶۳۶۸۴]	[۲۰۱۰۸۵, ۲۱۲۱۳۵]	{۵۳۳ و ۴۳۹}	{۲۳/۲۵ و ۲۱/۰۱}	۱۲
{۱۱۵۰۳ و ۱۱۲۷۱}	[۱۱۵۳۶۴۳۸۹, ۱۲۷۵۸۲۶۹۳]	[۱۵۵۳۴۶۸۵۹, ۱۸۷۵۷۲۶۹۳]	[۹۰۷۲۴, ۱۰۸۱۹۵]	{۵۸۷ و ۴۲۴}	{۴۰/۰۱ و ۳۷/۵۴}	۱۳
{۱۳۸۹۳ و ۱۲۴۶۷}	[۹۹۵۵۴۵۳۰, ۱۱۹۲۲۹۹۴۶]	[۱۱۹۵۵۴۳۰۳, ۱۳۹۲۲۹۹۴۶]	[۱۸۳۹۶۱, ۲۰۵۵۶۳]	{۵۷۵ و ۴۲۹}	{۲۵/۹۶ و ۲۴/۶۶}	۱۴
{۱۴۴۰۵ و ۱۲۶۲۴}	[۱۰۷۳۹۰۴۵۷, ۱۲۹۵۰۷۰۵۷]	[۱۴۷۳۳۹۵۷۷, ۱۵۹۵۵۷۰۵۷]	[۱۱۵۲۶۴, ۱۳۹۸۳۵]	{۵۲۹ و ۴۸۹}	{۱۳/۲۳ و ۱۱/۱۴}	۱۵
{۱۲۴۷۸ و ۱۱۰۲۵}	[۱۴۴۲۷۷۶۱۶, ۱۵۹۹۰۲۳۰۴]	[۱۹۴۲۸۷۱۸۶, ۱۹۹۹۷۲۳۰۴]	[۲۱۴۵۱۳, ۲۳۴۲۳۹]	{۵۴۶ و ۴۷۳}	{۱۲/۱۴ و ۲/۷۷}	۱۶
{۱۲۱۳۱ و ۱۱۱۹۷}	[۱۲۳۳۰۰۲۰۴, ۱۳۷۶۸۹۵۲۹]	[۱۹۳۳۴۰۰۸۴, ۱۹۷۶۰۹۵۲۹]	[۲۰۴۵۷۲, ۲۱۰۴۷۱]	{۴۱۲ و ۳۴۵}	{۱۴/۱۹ و ۱۲/۷۰}	۱۷
{۱۴۵۰۹ و ۱۳۷۶۳}	[۱۰۹۶۶۴۷۵۲, ۱۲۳۰۷۱۹۹۸]	[۱۳۹۶۱۶۵۶۲, ۱۴۳۰۷۱۹۹۸]	[۲۱۸۳۴۴, ۲۲۰۳۲۳]	{۶۴۳ و ۵۴۱}	{۱۲/۲۹ و ۱۱/۸۱}	۱۸
{۱۰۸۲۸ و ۹۴۳۰}	[۹۰۱۵۹۸۰۴, ۱۰۹۸۷۳۳۳۸]	[۱۱۰۱۵۹۰۴۴, ۱۳۹۸۹۳۳۳۸]	[۱۳۰۱۲۷, ۱۵۴۴۸۶]	{۷۹۹ و ۶۶۳}	{۲۴/۲۸ و ۲۲/۷۳}	۱۹
{۱۵۲۹۵ و ۱۳۸۳۷}	[۱۱۹۰۱۳۱۶۳, ۱۲۵۴۵۶۲۱۱]	[۱۵۹۰۸۱۶۴۳, ۱۶۵۴۵۶۲۱۱]	[۱۵۶۷۹۹, ۱۶۸۵۳۳]	{۸۳۸ و ۲۷۶}	{۱۳/۳۸ و ۱۱/۳۳}	۲۰
{۱۴۰۷۲ و ۱۳۴۷۴}	[۱۰۳۳۹۳۲۵۸, ۱۲۷۱۶۰۱۸۶]	[۱۲۳۳۱۹۵۵۸, ۱۴۷۱۴۰۱۸۶]	[۱۱۲۳۲۰, ۱۲۱۷۰۳]	{۷۹۵ و ۳۵۷}	{۱۷/۸۷ و ۱۵/۸۰}	۲۱
{۱۱۱۴۲ و ۹۹۷۵}	[۱۵۳۰۶۶۴۲۸, ۱۶۹۵۲۷۵۲۰]	[۱۹۳۰۰۶۲۹۸, ۱۹۹۵۱۷۵۲۰]	[۱۳۹۲۸۲, ۱۴۵۸۲۴]	{۶۷۳ و ۷۴۳}	{۱۴/۹۷ و ۱۲/۴۹}	۲۲
{۲۱۹۹۸ و ۲۱۵۴۴}	[۱۵۳۷۶۱۷۲۰, ۱۷۷۲۴۳۰۹۸]	[۱۷۳۷۴۶۲۶۰, ۱۸۷۲۲۳۰۹۸]	[۱۳۰۹۰۵, ۱۴۸۷۶۸]	{۵۶۲ و ۴۴۱}	{۱۵/۶۴ و ۱۳/۸۴}	۲۳
{۱۵۱۴۰ و ۱۳۴۷۶}	[۱۰۰۶۱۴۴۶۲, ۱۲۳۱۸۴۶۰۴]	[۱۴۰۶۸۱۶۳۲, ۱۵۳۱۹۴۶۶۰۴]	[۱۱۷۸۸۶, ۱۳۶۴۷۰]	{۴۸۳ و ۳۷۱}	{۱۴/۲۴ و ۱۲/۹۰}	۲۴
{۱۴۸۳۹ و ۱۲۵۲۹}	[۸۸۹۹۳۵۴۴, ۱۰۶۱۵۶۷۷۵]	[۱۰۸۹۹۵۴۴۶, ۱۱۶۱۴۶۷۷۵]	[۱۰۶۳۴۹, ۱۱۶۹۲۲]	{۵۴۷ و ۶۲۰}	{۱۲/۶۳ و ۱۰/۹۲}	۲۵

جدول ۲. امتیازات کارایی

$(x_۱, x_۲, x_۳, y_۱, y_۲, y_۳)$	$e_o^{(U)}$	$e_o^{(L)}$	e_o^*	شعبه
(۱۹۰۴۶, ۹۴۰۵۸۹۵۶, ۱۱۴۰۵۳۵۶۳, ۲۲۳۷۱۶, ۱۵/۱۴)	۱	۰/۷۰۷۷	۰/۸۲۱۴	۱
(۱۵۸۳۰, ۱۹۴۱۰۹۶۸۴, ۲۴۴۱۸۹۶۸۴, ۱۹۷۸۲۲, ۲۸۱, ۲۹/۷۴)	۱	۰/۷۴۹۲	۱	۲
(۱۶۸۰۷, ۱۲۴۳۰۱۲۹۸, ۱۷۲۲۰۳۷۶۱, ۱۶۷۸۸۶, ۷۴۱, ۳۳/۲۵)	۰/۸۹۲۹	۰/۵۶۰۸	۰/۷۲۲۷	۳
(۲۳۳۵۹, ۱۸۸۸۹۵۸۴۰, ۱۱۸۰۲۷۶۶۴, ۲۲۲۱۶۹, ۵۱۲, ۲۹/۱۲)	۱	۰/۶۵۴۷	۰/۸۶۵۹	۴
(۲۰۶۵۳, ۱۲۹۵۵۹۱۲۱, ۱۸۹۵۵۵۲۶۱, ۲۲۵۴۴۶, ۲۷۳, ۲۵/۵۸)	۱	۰/۷۸۹۱	۱	۵
(۱۹۴۲۴, ۱۰۴۳۳۴۵۹۳, ۱۴۴۳۴۳۹۲۳, ۲۱۰۷۵۰, ۲۹۸, ۲۳/۲۴)	۱	۰/۷۸۴۳	۱	۶
(۱۸۲۸۴, ۱۵۹۳۱۴۷۴۱, ۱۷۵۵۱۳۱۵۲, ۱۹۱۹۶۰, ۵۰۵, ۲۹/۳۸)	۰/۸۱۸۸	۰/۵۵۰۸	۰/۸۱۴۹	۷
(۲۱۴۶۸, ۱۷۹۵۸۱۳۹۳, ۱۲۹۶۰۵۴۲, ۱۱۲۳۹۲, ۴۳۴, ۲۵/۰۸)	۱	۱	۱	۸
(۲۱۴۶۶, ۱۸۵۸۱۵۲۶۸, ۲۱۵۶۰۷۶۱۹, ۲۶۵۴۲۴, ۴۲۲, ۲۱/۳۴)	۱	۰/۷۴۸۱	۰/۹۶۳۳	۹
(۲۲۶۵۱, ۲۴۲۹۶۵۰۴۴, ۳۳۰۶۷۸۷۷۳, ۲۱۴۰۹۶, ۳۳۲, ۲۸/۷۸)	۱	۱	۱	۱۰
(۱۸۶۴۵, ۱۲۰۴۷۴۱۱۲, ۱۴۸۵۱۳۴۳۰, ۱۴۴۳۳۸, ۳۲۱, ۱۷/۲۴)	۱	۰/۷۳۸۶	۱	۱۱
(۱۹۱۶۷, ۹۹۹۳۹۶۸۴, ۱۱۷۶۶۲۷۲۱, ۲۰۱۰۸۵, ۴۳۹, ۲۳/۲۵)	۱	۰/۶۲۹۵	۰/۹۱۹۵	۱۲
(۱۱۲۷۱, ۱۲۷۵۸۲۶۹۳, ۱۵۵۳۴۶۸۵۹, ۹۰۷۲۴, ۴۲۴, ۴۰/۰۱)	۱	۰/۹۱۱۷	۱	۱۳
(۱۲۴۶۷, ۹۹۵۵۴۵۳۰, ۱۱۹۵۵۴۳۰۳, ۱۸۳۹۶۱, ۴۲۹, ۲۵/۹۶)	۰/۶۸۲۸	۰/۳۹۵۹	۰/۶۸۲۸	۱۴
(۱۲۶۲۴, ۱۲۹۵۰۷۰۵۷, ۱۴۷۳۳۹۵۷۷, ۱۱۵۲۶۴, ۴۸۹, ۱۳/۲۳)	۱	۰/۷۶۰۲	۱	۱۵
(۱۱۰۲۵, ۱۵۹۹۰۲۳۰۴, ۱۹۴۲۸۷۱۸۶, ۲۱۴۵۱۳, ۴۷۳, ۱۲/۱۴)	۱	۱	۱	۱۶
(۱۱۱۹۷, ۱۳۷۶۸۹۵۲۹, ۱۹۳۳۴۰۰۸۴, ۲۰۴۵۷۲, ۴۱۲, ۱۴/۱۹)	۱	۰/۸۳۹۱	۱	۱۷

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

(۱۴۵۰۹, ۱۰۹۶۶۴۷۵۲, ۱۳۹۶۱۶۵۶۲, ۲۱۸۳۴۴, ۱۲/۲۹,۶۴۳)	۱	۰/۷۴۱۶	۰/۸۹۴۵	۱۸
(۹۴۳۰, ۹۰۱۵۹۸۰۴, ۱۱۰۱۵۹۰۴۴, ۱۳۰۱۲۷, ۲۴/۲۸,۷۹۹)	۰/۸۰۱۷	۰/۴۵۲۱	۰/۶۶۲۹	۱۹
(۱۳۸۳۷, ۱۲۵۴۵۶۲۱۱, ۱۶۵۴۵۶۲۱۱, ۱۵۶۷۹۹, ۱۳/۳۶,۲۷۶)	۱	۰/۷۶۱۲	۱	۲۰
(۱۳۴۷۴, ۱۲۷۱۶۰۱۸۶, ۱۲۳۳۱۹۵۵۸, ۱۱۲۳۲۰, ۱۷/۸۷,۳۵۷)	۱	۰/۶۷۴۸	۰/۸۹۰۸	۲۱
(۹۹۷۵, ۱۶۹۵۲۷۵۲۰, ۱۹۳۰۰۶۲۹۸, ۱۴۵۸۲۴, ۱۴/۹۷,۷۴۳)	۱	۰/۹۲۸۱	۱	۲۲
(۲۱۵۴۴, ۱۷۷۲۴۳۰۹۸, ۱۷۳۷۴۶۲۶۰, ۱۴۸۷۶۸, ۱۵/۶۴,۴۴۱)	۱	۱	۱	۲۳
(۱۳۴۷۶, ۱۲۳۱۸۴۶۰۴, ۱۴۰۶۸۱۶۳۲, ۱۱۷۸۸۶, ۱۴/۲۴,۳۷۱)	۱	۰/۷۱۱۸	۰/۹۱۹۱	۲۴
(۱۲۵۲۹, ۱۰۶۱۵۶۷۷۵, ۱۰۸۹۹۵۴۴۶, ۱۰۶۳۴۹, ۱۰/۹۲,۶۲۰)	۱	۰/۶۴۷۲	۱	۲۵

۸ نتیجه‌گیری

در بسیاری از مطالعات کاربردی با مواردی مواجه می‌شویم که متغیرهای ورودی و خروجی متعلق به بازه‌ای و یا مجموعه‌ی گسسته‌ای از اعداد هستند. در این مقاله به بررسی کارایی واحدهایی پرداخته می‌شود که برخی از ورودی‌ها و خروجی‌هایشان همزمان شامل داده‌های نادقیق بازه‌ای و گسسته می‌باشند. برای این منظور، مدلی غیرخطی پیشنهاد شد و سپس با استفاده از تغییراتی، این مدل تبدیل به یک مدل صحیح و خطی شده است که برای محاسبه‌ی کارایی چنین واحدهایی مورد استفاده قرار گرفت.

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429–44.

[2] Cook, W. D., Kress, M., Seiford, L., (1993). On the use of ordinal data in data envelopment analysis. Journal of Operational Research Society, 44, 133-140.

[3] Cook, W. D., Kress, M., Seiford, L., (1996). Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors. Management Science, 45, 597-607.

[4] Cooper, W. W., Park, K. S., Yu G., (1999). IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA. Journal of Operational Research Society, 47, 945-953.

[5] Kim, S. H., Park C. G., Park K. H., (1999). An application of data envelopment analysis in telephone offices evaluation with partial data. Computers & Operations Research, 26, 59-72.

[6] Cooper, W. W., Park K. S., Yu, G., (2001). An illustrative application of IDEA (Imprecise data envelopment analysis) to a Korean mobile telecommunication company. Operations Research, 49, 807-820.

[7] Lee, Y. K., Park K. S., Kim S. H., (2002). An Identification of inefficiencies in an additive model based on IDEA (Imprecise data envelopment analysis). Computers & Operations Research, 29, 1661-1676.

[8] Despotis, D. K., Smirlis, Y. G., (2002). Data envelopment analysis with imprecise data European Journal of Operational Research, , 140(1), 24-36.

[9] Zhu, J., (2003). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): Areview and improvement with an application. Euroupean Journal of Operational Research, 144, 513-529.

[10] Kao, C., (2006) Interval efficiency measures in data envelopment analysis with imprecise data European Journal of Operational Research, 174(2), 1087-1099.

[11] Sam Park, K. Duality,(2010), efficiency computations and interpretations in imprecise DEA, European Journal of Operational Research. 200(1), 289-296.

[12] Wang, Y. M., Yang, J. B., (2007). Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies. Journal of Computational and Applied Mathematics, 198(1), 253- 267.

[13] Azizi, H., Wang, Y. B., (2013). Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision-making units. Measurement, 46(3), 1325- 1332.

[14] Azizi, H., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., (2015). Slacks-based measures of efficiency in

imprecise data envelopment analysis: An approach based on data envelopment analysis with double frontiers. Computers & Industrial Engineering, 79, 42- 51.

[15] Khalili-Damaghani, K., Tavana, M., (2015). A data envelopment analysis model with interval data and undesirable output for combined cycle power plant performance assessment. Expert Systems with Applications, 42(2), 760- 773.

[16] Hatami Marbini, A., Ghelej Beigi, Z., Hougard, J. L., Gholami, K,. (2018). Measurement of returns-to-scale using interval data envelopment analysis models. Computers & Industrial Engineering, 117, 94- 107.

[17] Toloo, M., Keshavarz, E., Hougard, J. L., Hatami Marbini, A., (2018). Dual-role factors for imprecise data envelopment analysis. Omega, 77, 15- 31.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]