

## استفاده از بهینه‌سازی نیمه معین مثبت برای حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی سیستم‌های کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی همدم

رضا دهقان<sup>۱\*</sup>، محمد کیانپور<sup>۲</sup>

۱- مربی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجدسلیمان، گروه ریاضی، مسجدسلیمان، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۱۱ مهر ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۱۵ اسفند ۱۳۹۵

### چکیده

در این مقاله یک روش بهینه‌سازی برای حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری که کاربرد مهمی در مهندسی شیمی دارد استفاده شده است. سیستم کنترلی در نظر گرفته شده یک سیستم کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی همدم است. در این مساله مشتق کسری ریمان - لیوویل برای توصیف مدل ریاضی سیستم کنترلی استفاده شده است. برای حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری ابتدا با استفاده از گشتاورهای از مرتبه‌ی مختلف به یک مساله‌ی کنترل بهینه در فضای گشتاوری می‌رسیم و سپس با استفاده از تکنیک گسسته‌سازی متغیرها به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت دست پیدا خواهیم کرد. در آخر با حل مساله بهینه‌سازی معادل جواب مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری در نظر گرفته شده را به دست می‌آوریم.

**کلمات کلیدی:** گشتاورها، بهینه‌سازی نیمه معین مثبت، مشتق کسری، کنترل بهینه.

### ۱ مقدمه

مسایل کنترل بهینه در بسیاری از زمینه‌های علوم، مهندسی، اقتصاد و ریاضیات ظاهر شده است [۱ و ۲]. تعریف عمومی کنترل بهینه عبارت است از کمینه‌سازی یک تابع معیار متشکل از متغیرهای حالت و کنترل یک سیستم، روی یک مجموعه‌ی قابل قبول از کنترل [۳]. با توجه با اینکه معمولاً حل تحلیلی مسایل کنترل بهینه پیچیده است و یا در اکثر اوقات غیر ممکن است، از روش‌های عددی برای حل آن‌ها استفاده می‌شود. آنچه که در مورد روش‌های عددی مورد توجه قرار می‌گیرد، اولاً دقت محاسبات و سپس حجم محاسبات است. عمده‌ی روش‌های عددی برای حل مسایل کنترل بهینه روش‌های مستقیم هستند، به این صورت که مساله‌ی اصلی با گسسته‌سازی متغیرهای ظاهر شده در مساله به یک مساله‌ی بهینه‌سازی تبدیل می‌شود و سپس با حل مساله‌ی بهینه‌سازی به دست آمده جواب مساله‌ی اصلی را در نقاط گسسته‌سازی شده به دست می‌آورند. از جنبه‌ی ریاضی مسایل کنترل بهینه با توجه معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم کنترلی شناسایی می‌شوند، یعنی دسته‌بندی مسایل کنترل بهینه

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: rdehghan110@gmail.com

براساس انواع معادلات دیفرانسیلی است که مدل ریاضی سیستم کنترلی را توصیف می‌کنند. لذا هرچه بیش‌تر در به‌دست آوردن مدل ریاضی مساله دقت شود، نتیجه‌ی مطلوب‌تری از سیستم کنترلی به‌دست خواهد آمد. از آن‌جا که مشتقات کسری در بررسی رفتار یک پدیده‌ی فیزیکی یا یک سیستم دینامیکی، از دقت بیش‌تری برخوردار هستند، حسابان کسری و کاربردهای آن موضوع مطالعه و تحقیق بسیاری از پژوهشگران است، به‌طوری‌که معادلات دیفرانسیل کسری به‌عنوان یک ابزار سودمند برای توصیف حافظه و خواص وراثتی بسیاری از فرآیندها به‌کار گرفته شده است. از جمله مسایلی که تحت تأثیر مشتقات کسری به‌سرعت مورد توجه بسیاری پژوهشگران قرار گرفته است، کنترل بهینه‌ی کسری است. تعریف کنترل بهینه‌ی کسری به این صورت است که در یکی از تابع هدف یا معادلات حاکم بر سیستم و یا هر دو مشتق کسری ظاهر شده باشد. همان‌طور که برای حل کنترل بهینه‌ی معمولی روش‌های مختلفی وجود دارد، برای کنترل بهینه‌ی کسری نیز با توجه به ساختار و مدل سیستم روش‌های متنوعی وجود دارد که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

اولین بار توسط آگراوال [۴] فرمول‌بندی و طرحی برای حل مسایل کنترل بهینه‌ی کسری منتشر شد، که وی با به‌کارگرفتن حساب تغییرات کسری به تحلیل و بررسی یک نوع خاص از مسایل کنترل بهینه‌ی کسری پرداخته است. سپس در مقاله دیگری وی [۵] یک فرمول‌بندی کلی و یک راه حل عددی برای حل مسایل کنترل بهینه‌ی کسری که در آن مشتق کسری ریمان - لیوویل ظاهر شده است، ارائه داد. اما با در نظر گرفتن مشتق کسری کپوتو، و این که این نوع مشتق بیش‌تر توسط محققان مورد توجه قرار گرفته است، آگراوال و تنگ پونگ [۶ و ۷] مسایل کنترل بهینه‌ی کسری را این‌بار به‌جای مشتق کسری ریمان - لیوویل، با مشتق کسری کپوتو در نظر گرفتند و سپس روش عددی برای حل تقریبی این نوع از مساله‌ی کنترل بهینه ارائه کردند. لازم به‌ذکر است که بعد از آگراوال مقالات زیادی در زمینه‌ی حل مسایل کنترل بهینه‌ی کسری منتشر شده که توضیح درباره‌ی همه‌ی آن‌ها مقدور نیست اما چند نمونه از آن‌ها عبارتند از [۸-۱۱]. در چند سال اخیر استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد برای حل مسایل کنترل بهینه‌ی کسری مورد توجه‌ی بعضی از پژوهشگران قرار گرفته است. از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به مقاله‌ای که در سال ۲۰۱۱، توسط یوسفی و همکاران [۱۲] منتشر شد اشاره کرد، ایشان از چندجمله‌ای پایه‌ی لژاندر، استفاده کرده و مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری را با استخراج شرایط لازم بهینگی به حل یک دستگاه معادلات جبری کاهش دادند. مقاله‌ی دیگری توسط علی پور و همکاران [۱۳] منتشر شد با این تفاوت که این بار از چند جمله‌ای‌های برنشتاین برای حل مساله به‌کار گرفته‌اند. در سال ۲۰۱۵، هم توسط کشاورز و همکاران [۱۴] مقاله‌ای منتشر شده که از چندجمله‌ای‌های برنولی برای حل مساله استفاده شده است. بالاخره کار بعدی که می‌توان به آن اشاره کرد، که در آن از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی استفاده شده، مقاله‌ای است که توسط دوها و همکاران [۱۵] منتشر شد. هدف اصلی این مقاله بیان کاربردی از بهینه‌سازی در علوم مهندسی است زیرا مساله‌ی در نظر گرفته شده در این مقاله حالت خاصی از مسایلی است که در [۱۶] ارائه شده است. در این مقاله، یک روش مستقیم برای حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری مربوط سیستم‌های کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی همدم همراه با واکنش و ن دی ووس ارائه شده است. ایده‌ی اصلی روش ارائه شده بر اساس استفاده از مرتبه‌های مختلف گشتاورها به‌جای تابع کنترل ظاهر شده در مدل ریاضی مساله است به‌طوری‌که با این کار

مساله‌ی کنترل بهینه به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت در فضای گشتاورها تبدیل می‌شود. در آخر مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت به دست آمده با گسسته‌سازی متغیر زمان ظاهر شده در مساله حل می‌شود. مهم‌ترین مزیت این روش نسبت به سایر روش‌های عددی سادگی محاسبات و کاستن حجم محاسبات است، البته ناگفته نماند که نتایج عددی به دست آمده حاکی از آن است که دقت محاسباتی در این روش نیز قابل قبول است. ساختار مقاله به این ترتیب است: در بخش دوم به معرفی اندازه‌ها و گشتاورها می‌پردازیم. در بخش سوم کنترل بهینه‌ی کسری را معرفی می‌کنیم. در بخش چهارم مدل ریاضی راکتور مخزن همزن پیوسته‌ی همدمای و مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری مربوط به آن را ارائه می‌کنیم. چگونگی حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری معرفی شده در بخش چهارم به وسیله‌ی گشتاورها و بهینه‌سازی نیمه معین مثبت تحت عنوان کلی تبدیل مساله‌ی کنترل بهینه به بهینه‌سازی نیمه معین مثبت در بخش پنجم آمده است و سپس در بخش ششم نتیجه‌گیری آمده است.

## ۲ اندازه‌ها و گشتاورها

در این بخش چند تعریف که در باره‌ی اندازه‌ها و گشتاورها که در قسمت‌های دیگر این مقاله مورد نیاز است را از [۱۷-۱۹] ذکر می‌کنیم.

**تعریف ۱:** یک اندازه‌ی احتمال  $\mu$  روی مجموعه‌ی  $X$ ، یک اندازه‌ی مثبت است به طوری که  $\mu(X) = 1$ .

یک نمونه از اندازه‌های احتمال، اندازه‌ی دیراک است که در نقطه‌ی  $\zeta$   $X = \zeta$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta_{\zeta}(A) = \begin{cases} 1 & \zeta \in A, \\ 0 & \zeta \notin A. \end{cases}$$

برای یک مجموعه‌ی فشرده‌ی داده شده‌ی  $X \subset R^n$ ، فرض کنیم  $M(X)$ ، نمایشگر فضای باناخ از اندازه‌های علامت‌دار باشد که تکیه‌گاهش روی  $X$  قرار دارد؛ بنابراین یک اندازه  $\mu \in M(X)$ ، تابعی است که هر زیر مجموعه از  $X$  را می‌گیرد و یک عدد حقیقی را برمی‌گرداند. اثر اندازه‌ی  $\mu$  روی یک تابع مانند  $v$  از فضای توابع پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle v, \mu \rangle = \int_X v(x) d\mu(x)$$

**تعریف ۲:** برای یک بردار حقیقی  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  و یک عدد صحیح  $\beta \in N^n$  داده شده، یک تک

$$x^{\beta} = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i} \quad \text{تعریف می‌شود که درجه‌ی آن برابر است با } |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i.$$

**تعریف ۳:** برای اندازه‌ی داده شده‌ی  $\mu \in M(X)$  و  $\beta \in N^n$ ، گشتاور مرتبه‌ی  $\beta$  عبارت است از عدد حقیقی

$$y_{\beta} = \int_X x^{\beta} \mu(dx)$$

و به  $\{y_{\beta}\}_{\beta \in N^n}$  دنباله‌ی گشتاورهای اندازه‌ی  $\mu$  گفته می‌شود و برای عدد ثابت داده شده‌ی  $d \in N$  بردار

گشتاورهای تا درجه‌ی  $d$  عبارت است از  $\{y_{\beta}\}_{|\beta| \leq d}$ .

**تعریف ۴:** برای دنباله‌ی داده شده‌ی  $y = \{y_\beta\}_{\beta \in \mathbb{N}^n}$ ، تابعک خطی ریس به صورت  $l_y : R[x] \rightarrow R$  تعریف می‌شود که اثر آن بر روی چند جمله‌ای‌های  $P(x) = \sum_\beta p_\beta x^\beta$  به صورت زیر است.

$$l_y(P(x)) = \sum_\beta p_\beta y_\beta$$

به عبارت دیگر تابعک ریس به‌عنوان یک عملگر به خطی‌سازی چند جمله‌ای‌ها می‌پردازد.

**تعریف ۵:** ماتریس گشتاور مرتبه‌ی  $d$ ، عبارت است از ماتریس  $M_d(y)$  به‌طوری که

$$l_y(P^*(x)) = p^T M_d(y) p$$

که در آن  $P(x)$ ، چندجمله‌ای درجه‌ی  $d$  و  $p$  بردار ضرایب آن است.

برای یک حالت خاص وقتی که  $X \subset R$ ، گشتاور از مرتبه‌ی  $i = 0, 1, \dots, 2n$  را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$m_i = \int_X x^i \mu(dx)$$

**تعریف ۶:** فرض کنیم  $m = \{m_i\}$  دنباله‌ای از گشتاورهای اندازه‌ی احتمال  $\mu_m$  با  $m_0 = 1$  باشد. ماتریس نیمه معین مثبت هنکل یک ماتریس از مرتبه‌ی  $n$  است که دارای درایه‌های متشکل از دنباله‌ی  $m$  است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M_n(m) = \begin{pmatrix} 1 & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n} \end{pmatrix}$$

### ۳ کنترل بهینه‌ی کسری

در این بخش بر فرمول‌بندی ریاضی کنترل بهینه‌ی کسری مروری کوتاه داریم. برای مشتقات کسری چندین نوع تعریف وجود دارد، اما سه نوع مشتق کسری ریمان-لیوویل، کپوتو و گرانوالد-لتنیکوف بیشتر از سایر مشتقات کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله ما از دو نوع مشتق کسری ریمان-لیوویل و گرانوالد-لتنیکوف استفاده خواهیم کرد و برای مطالعه‌ی بیش‌تر خواننده را به [۲۰] ارجاع می‌دهیم.

**تعریف ۷:** مشتق کسری ریمان-لیوویل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$${}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \quad n-1 < \alpha < n.$$

**قرارداد:** برای سادگی مشتق کسری ریمان-لیوویل را با  $D^\alpha$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۸:** مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف برای تابع  $f(t)$  به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$${}^{GL}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{r=0}^N w_r^{(\alpha)} f(t-rh),$$

$$N = \left\lceil \frac{t-a}{h} \right\rceil$$

که در آن  $[.]$  یعنی جزء صحیح و

$$w_{\circ}^{(\alpha)} = 1, \quad w_r^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{r}\right) w_{r-1}^{(\alpha)} \quad r = 1, 2, \dots$$

قضیه‌ی زیر رابطه‌ی بین مشتقات کسری ریمان-لیوویل و گرانوالد-لنیکوف را بیان می‌کند.

**قضیه ۱:** فرض کنید تابع  $f(t)$  دارای مشتقات مرتبه‌ی اول تا مرتبه‌ی  $n-1$  پیوسته بوده و مشتق  $n$ -ام آن انتگرال پذیر باشد. همچنین فرض کنید  $n-1 < \alpha < n$ . در این صورت مشتق مرتبه‌ی  $\alpha$  با تعریف گرانوالد-لنیکوف تابع  $f(t)$  با مشتق مرتبه‌ی  $\alpha$  ریمان-لیوویل این تابع برابر خواهد بود [۲۱].

مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری که اولین بار در [۴] مطرح شده است، به این صورت است که می‌خواهیم کنترل بهینه‌ی  $u$  را بیابیم به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} \text{Min } J(u) &= \int_0^1 \Omega(t, x, u) dt \\ D^\alpha x(t) &= \Phi(t, x, u), \\ x(\circ) &= x_\circ \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\Omega, \Phi$  دو تابع دلخواه هستند و  $x(t)$  متغیر حالت سیستم است.  $D^\alpha$  مشتق کسری ریمان-لیوویل است. همان‌طور که می‌بینیم مشتق کسری فقط در معادله‌ی حاکم بر سیستم کنترلی ظاهر شده است، ولی در تابع هدف مشتق کسری نداریم. مساله‌ی کنترل بهینه‌ای که می‌خواهیم در این مقاله به حل آن به‌پردازیم حالت خاصی از مساله‌ی (۱) است.

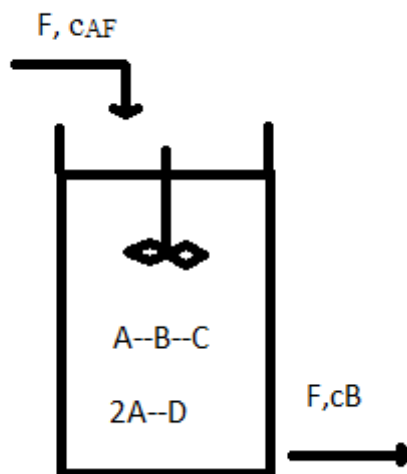
#### ۴ کنترل بهینه‌ی راکتور مخزن همزن پیوسته

سیستم‌های کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی هم‌دما همراه با واکنش ون دی ووس، اغلب مورد توجه پژوهشگران در حوزه‌ی مهندسی شیمی قرار می‌گیرد. علت آن این است که مدل ریاضی این نوع از راکتورها غیرخطی و دارای خواص جالبی است که در مهندسی شیمی دارای اهمیت است. مدل ریاضی این فرآیند کنترلی که در این مقاله در نظر گرفته شده است توسط معادلات زیر توصیف می‌شود [۲۲].

$$D^\alpha c_A = -k_1 c_A - k_2 c_A^2 + \frac{F}{V} (c_{AF} - c_A)$$

$$D^\alpha c_B = k_1 c_A - k_2 c_B - \frac{F}{V} c_B$$

که در آن  $c_A > 0, c_B > 0$  به ترتیب غلظت مواد  $A, B$  هستند و  $F \geq 0$ ، جریان ورودی،  $c_{AF}$ ، غلظت ماده‌ی  $A$  در ورودی به‌طوری‌که  $c_{AF} > c_A$ ،  $V > 0$ ، حجم ثابت راکتور،  $k_1, k_2$ ، ثابت‌های سرعت واکنش هستند. نمودار این فرآیند کنترلی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. راکتور مخزن همزن پیوسته همدم

حال می‌توانیم مساله‌ی کنترل بهینه‌ی این فرآیند کنترلی را معرفی کنیم و آن عبارت است از یافتن تابع کنترل  $u$  به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} \text{Min } J(u) &= \int_0^1 (x_1^* + x_2^* + u^*) dt \\ D^\alpha x_1(t) &= -k_1 x_1 - k_r x_1^* + (c_{AF} - x_1)u \\ D^\alpha x_2(t) &= k_1 x_1 - k_r x_2 - x_2 u \\ x_1(0) &= x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02} \end{aligned} \quad (2)$$

## ۵ تبدیل مساله‌ی کنترل بهینه به بهینه‌سازی نیمه معین مثبت

در این بخش طی فرآیندی مساله‌ی کنترل بهینه‌ی (۲) را با استفاده از گشتاورها به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت تبدیل می‌کنیم.

### ۵-۱ نمایش چند جمله‌ای

از آن‌جا که تابع همیلتونی، برای مساله‌ی کنترل بهینه کسری در [۴] به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} H &= H(t, \lambda, x, u) = \Omega(t, x, u) + \lambda \Phi(t, x, u) \\ \text{می‌توانیم تابع همیلتونی را برای مساله‌ی کنترل بهینه‌ی (۲) به صورت زیر بنویسیم:} \\ H &= (1 - \lambda_1) x_1^* + \lambda_2 (x_1 - x_2) + \lambda_3 (1 - x_1) - \lambda_4 x_2 u + u^* \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $u, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$  توابعی بر حسب  $t$  هستند. با توجه به شکل رابطه‌ی (۳) می‌بینیم که تابع همیلتونی مساله‌ی کنترل بهینه‌ی (۲) به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب توان‌های افزایشی تابع کنترل به دست آمده است، لذا برای راحتی رابطه‌ی (۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$H = \sum_{i=0}^r \theta_i u^i \quad (4)$$

که در آن

$\theta_0 = (1 - 10\lambda_1)x_1^2 + 50(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 - 100\lambda_2x_1, \theta_1 = (\lambda_1(10 - x_1) - \lambda_2x_1), \theta_2 = 1$ . مساله‌ی کمینه‌سازی سراسری زیر از جمله مسایلی است که به‌طور مفصل در [۲۳ و ۲۴] مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته و توسط روش گشتاورها حل شده‌است.

$$\min_u H(u) = \sum_{i=0}^r \theta_i u^i \quad (5)$$

## ۲-۵ کنترل بهینه‌ی کسری تبدیل یافته

مهم‌ترین کار در این بخش تبدیل مساله‌ی (۵) به یک مساله‌ی معادل با ساختار خطی است. برای این کار از پوسته‌ی محدب گراف چندجمله‌ای  $H(u)$  استفاده می‌کنیم، به این صورت که اگر خانواده‌ی همه‌ی اندازه‌های احتمال را که تکیه‌گاه آن روی خط حقیقی قرار دارد را با  $P(R)$  نشان دهیم، پوسته‌ی محدب موردنظر را می‌توانیم به صورت زیر توصیف کنیم:

$$co(graph(H)) = \left\{ \int_R (u, H(u)) d\mu(u) : \mu \in P(u) \right\} \quad (6)$$

که در آن  $co$  مخفف معادل لاتین پوسته‌ی محدب است.

**قضیه ۲:** برای چندجمله‌ای جبری و قهری  $H(u)$ ، می‌توان نشان داد که پوسته‌ی محدب گراف  $H$  به صورت (۶) است و بنابراین مساله‌ی بهینه‌سازی (۵) می‌تواند در فضای اندازه‌های احتمال به صورت زیر تعریف شود:

$$\min_{\mu \in P(R)} \int_R H(u) d\mu(u) \quad (7)$$

و مجموعه جواب‌های (۷) عبارت است از مجموعه‌ای از اندازه‌های احتمال که تکیه‌گاه آن در مجموعه کمینه‌ی سراسری از  $H(u)$  قرار دارد، یعنی  $\arg \min(H)$  و زمانی که  $\arg \min(H)$  تک عضوی  $\{u^*\}$  باشد، اندازه‌ی دیراک  $\mu^* = \delta_{u^*}$  جواب یکتای (۷) است [۲۴ و ۲۵].

حال فرض کنیم،  $\Lambda$  مجموعه‌ی محدبی از همه‌ی بردارهای در  $R^r$  باشد که اعضایش گشتاورهای جبری از یک اندازه‌ی احتمال که تکیه‌گاه آن در خط حقیقی قرار دارد، باشد لذا با استفاده از ساختار چندجمله‌ای  $H$ ، (۷) می‌تواند به مساله‌ی بهینه‌سازی زیر تبدیل شود:

$$\min_{m \in \Lambda} \sum_{i=0}^r \theta_i m_i(t) \quad (8)$$

حال اگر ما نتوانیم مجموعه‌ی شدنی تشکیل شده توسط بردارهایی که در  $\Lambda$ ، وجود دارند را به درستی مشخص کنیم، (۸) صرفاً یک فرمول نویسی نظری است و در عمل برای حل مساله کارآمد نیست. از طرفی بستر  $\Lambda$ ، متشکل از همه‌ی بردارهایی در  $R^r$  است که اعضای آن تشکیل یک ماتریس نیمه معین مثبت هنکل می‌دهند.

$$\bar{\Lambda} = \left\{ (m_i)_{i=0}^r \in R^r : \begin{pmatrix} 1 & m_1 \\ m_1 & m_r \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}$$

بنابراین می‌توانیم مساله‌ی (۷) را به مساله‌ی برنامه‌ریزی ریاضی زیر تبدیل کنیم:

$$\min_{m \in \Lambda} \sum_{i=0}^r \theta_i m_i(t) \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m_1 \\ m_1 & m_r \end{pmatrix} \succeq 0$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مساله‌ی (۹) صورت نیمه معین مثبت دارد. در واقع تا این‌جا از کمینه‌سازی سراسری تابع همیلتونی (۵) به مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت (۹) در فضای گشتاورها رسیدیم، به‌طوری‌که مجموعه جواب‌های (۹) متشکل است از مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای  $m^* \in R^r$ ، که اعضای آن عبارت است از گشتاورهای جبری از اندازه‌های احتمال که تکیه‌گاه آن‌ها در  $\arg \min(H)$  قرار دارد.

**نتیجه ۱:** اگر  $H$  دارای کمینه سراسری یکتای  $u^*$  باشد، مساله‌ی (۹) یک جواب یکتای  $m^* \in R^r$  دارد که از گشتاورهای جبری از اندازه‌ی دیراک  $\delta_{u^*}$  تشکیل شده است به‌طوری‌که  $i = 0, 1, 2$   $m_i^* = (u^*)^i$  [۲۵]. کاری که تا این‌جا انجام شده به‌این صورت است که به‌جای حل مساله‌ی کمینه‌سازی (۵) می‌توانیم مساله (۹) را حل نماییم. در واقع با جای‌گذاری گشتاورهای مختلف به‌جای توان‌های مختلف  $u$  به یک مساله‌ی کمینه‌سازی نیمه معین مثبت در فضای گشتاورها رسیدیم. می‌دانیم که با جای‌گذاری گشتاورهای مختلف به‌جای توان‌های  $u$  در مساله‌ی (۲) با استدلال مشابه به مساله‌ی کنترل بهینه در فضای گشتاوری دست پیدا خواهیم کرد به‌طوری‌که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{Min } J(m) &= \int_0^1 (x_1^r(t) + x_r^r(t) + m_r(t)) dt \\ D^\alpha x_1(t) &= -k_1 x_1(t) - k_r x_1^r(t) + (c_{AF} - x_1(t)) m_1(t) \\ D^\alpha x_r(t) &= k_1 x_1(t) - k_r x_r(t) - x_r(t) m_1(t) \\ \begin{pmatrix} 1 & m_1(t) \\ m_1(t) & m_r(t) \end{pmatrix} &\succeq 0 \quad \forall t \in (0, 1) \\ x_1(0) &= x_{01}, \quad x_r(0) = x_{0r} \end{aligned} \quad (10)$$

حال می‌خواهیم بدانیم که بین جواب‌های (۲) و (۱۰) چه رابطه‌ای وجود دارد.

**قضیه ۳:** فرض کنید  $u^*(t)$ ، یک کمینه‌کننده برای مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری (۲) باشد، آنگاه بردار کنترل  $m^*(t)$  داده شده به صورت  $m_i^*(t) = (u^*(t))^i$   $i = 0, 1, 2$  یک کمینه‌کننده برای (۱۰) است.

**اثبات:** مشابه آنچه که در [۲۶] آمده است این قضیه اثبات می‌شود، فقط برای نوشتن شرایط لازم بهینگی از شرایط لازم بهینگی برای کنترل بهینه‌ی کسری مطرح شده در [۴] استفاده می‌کنیم.

بنابراین از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که اگر  $m^*(t)$  یک کمینه‌کننده برای (۱۰) باشد که در شرایط  $m_i^*(t) = (u^*(t))^i$   $i = 0, 1, 2$  صدق می‌کند، آنگاه  $m_1^*(t)$  یک کمینه‌کننده‌ی (۲) است.



## ۳-۵ گسسته سازی و تقریب

بعد از آن که رابطه ی بین مساله ی کنترل بهینه ی کسری (۲) و (۱۰) مشخص شد، برای حل مساله ی (۱۰) ابتدا فاصله ی  $[0, 1]$  را با طول گام  $h = \frac{1}{s}$  توسط نقاط  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_s, t_s = 1$  به  $s$  قسمت مساوی تقسیم می کنیم، لذا با انتخاب این نقاط مساله ی (۱۰) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \text{Min } J(m) &= \sum_{r=0}^{s-1} \int_{rh}^{(r+1)h} (x_1'(t_r) + x_2'(t_r) + m_r(t_r)) dt \\ D^\alpha x_1(t_r) &= -k_1 x_1(t_r) - k_2 x_1'(t_r) + (c_{AF} - x_1(t_r)) m_1(t_r) \\ D^\alpha x_2(t_r) &= k_1 x_1(t_r) - k_2 x_2(t_r) - x_2(t_r) m_1(t_r) \\ \begin{pmatrix} 1 & m_1(t_r) \\ m_1(t_r) & m_2(t_r) \end{pmatrix} &\succeq 0 \quad r = 1, 2, \dots, s \\ x_1(0) &= x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02} \end{aligned} \quad (11)$$

یکی از کارهایی که در محاسبه ی عددی مشتق کسری رایج است، تقریب مشتق کسری ریمان-لیوویل توسط مشتق کسری گرانووالد-لنیکوف است، یعنی بعد از به دست آوردن طول گام  $h$  می توانیم مشتق کسری موجود در (۱۱) را به صورت زیر تقریب بزنیم [۲۷].

$$\begin{aligned} D^\alpha x_i(t_r) &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^r w_j^{(\alpha)} x_i(t_r - jh) \quad i = 1, 2 \\ w_0^{(\alpha)} &= 1, \quad w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)} \quad j = 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (12)$$

بعد از جای گذاری روابط (۱۲) به جای مشتقات کسری در (۱۱) آخرین کاری که باید انجام دهیم تا مساله ی (۱۱) به یک مساله ی بهینه سازی نیمه معین مثبت تبدیل گردد، استفاده از فرمول انتگرال گیری عددی برای محاسبه ی انتگرال های ظاهر شده در تابع هدف (۱۱) است که ما از روش ذوزنقه ای مرکب استفاده می کنیم. بنابراین مساله ی (۱۱) به یک مساله ی بهینه سازی نیمه معین مثبت به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \text{Min } J(m) &= \frac{h}{2} (x_1'(t_0) + 2 \sum_{r=1}^{s-1} x_1'(t_r) + x_1'(t_s) + x_2'(t_0) + 2 \sum_{r=1}^{s-1} x_2'(t_r) + x_2'(t_s) \\ &\quad + m_1(t_0) + 2 \sum_{r=1}^{s-1} m_1(t_r) + m_1(t_s)) \\ \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^r w_j^{(\alpha)} x_1(t_r - jh) &= -k_1 x_1(t_r) - k_2 x_1'(t_r) + (c_{AF} - x_1(t_r)) m_1(t_r) \\ \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^r w_j^{(\alpha)} x_2(t_r - jh) &= k_1 x_1(t_r) - k_2 x_2(t_r) - x_2(t_r) m_1(t_r) \\ \begin{pmatrix} 1 & m_1(t_r) \\ m_1(t_r) & m_2(t_r) \end{pmatrix} &\succeq 0 \quad r = 1, 2, \dots, s \\ x_1(0) &= x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02} \end{aligned}$$

**تذکر:** از مزیت‌های این روش نسبت به سایر روش‌هایی که در زمینه‌ی کنترل بهینه‌ی کسری مطرح هستند این است که از لحاظ محاسباتی ساختار ساده‌تری دارد به‌علاوه این که بعضی از روش‌های مطرح شده قادر به حل مساله‌ی مورد نظر در این مقاله نیستند. برای مثال خواننده را به [۴، ۵، ۷، ۹، ۱۳، ۱۴، ۲۸] ارجاع می‌دهیم، زیرا در این مقالات معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم به صورت  $D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) + b(t)u(t)$  است در حالی که در (۲) شکل کلی‌تری به صورت  $D^\alpha x(t) = f(t, x(t), u(t))$  دارد و یا اگر به روش مطرح شده در [۲۹] مراجعه کنیم، می‌بینیم که اولاً دارای محاسبات پیچیده‌ای است و ثانیاً قادر به حل مساله‌ی مورد نظر در این مقاله نیست.

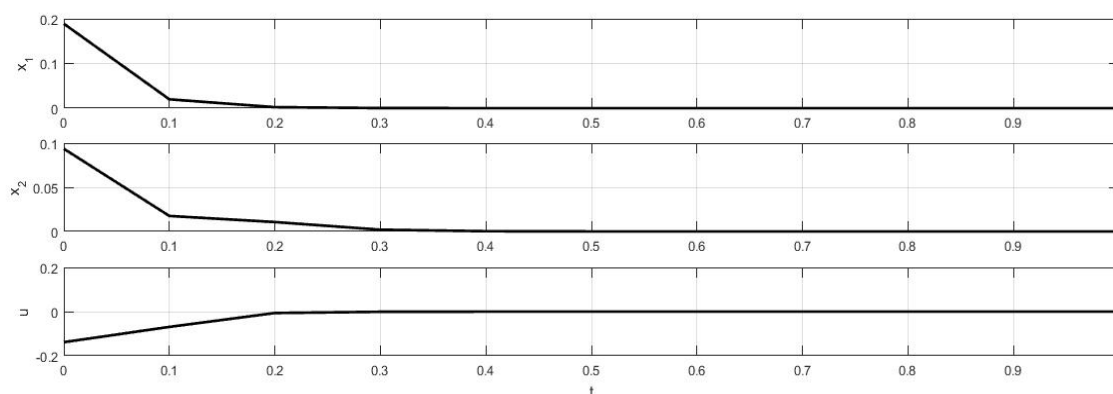
#### ۴-۵ نتایج عددی

در این قسمت با انتخاب پارامترهای موجود در (۲) از [۲۲] به صورتی که در جدول ۱ آمده است، به حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری (۲) پرداختیم.

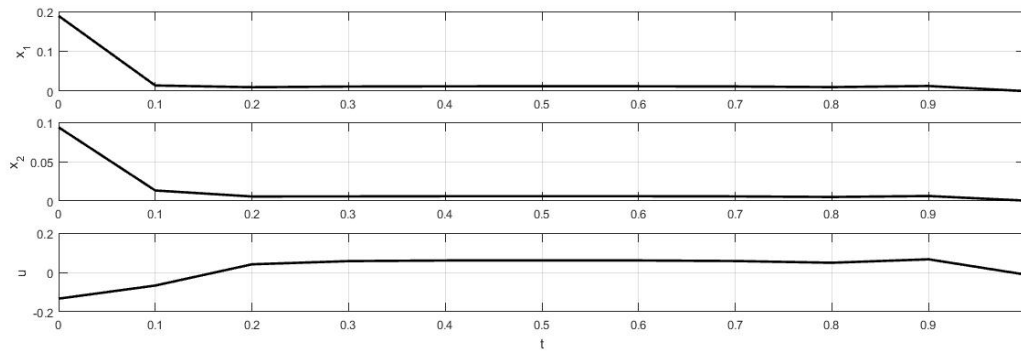
جدول ۱. پارامترهای موجود در (۲)

| $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $V$ | $C_{AF}$ | $x_1(\circ)$ | $x_2(\circ)$ |
|-------|-------|-------|-----|----------|--------------|--------------|
| ۵۰    | ۱۰۰   | ۱۰    | ۱   | ۱۰       | ۰/۱۸۹        | ۰/۰۹۳۶       |

در شکل‌های ۲ و ۳ نتیجه‌ی حاصل از حل مساله نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود با انتخاب یک تعداد محدود از نقاط به حالت تعادل پایدار سیستم کنترلی دست یافته‌ایم.



شکل ۲. نتیجه حاصل از انتخاب  $S = 10$  و  $\alpha = 1$

شکل ۳. نتیجه حاصل از انتخاب  $S = 10$  و  $\alpha = 0.93$ 

جدول ۲. مقدار تابع هدف و زمان صرف شده جهت انجام محاسبات با نرم افزار GAMS

| زمان اجرا (ثانیه) | مقدار تابع هدف ( $J$ ) | مرتبه مشتق کسری ( $\alpha$ ) |
|-------------------|------------------------|------------------------------|
| ۰/۰۱۶             | ۰/۰۱۰۷۷۰               | ۰/۹                          |
| ۰/۰۳۱             | ۰/۰۰۰۴۲۸               | ۰/۹۳                         |
| ۰/۰۴۶             | ۰/۰۰۰۰۸۰               | ۱                            |

جدول ۳. بررسی درستی رابطه قضیه ۳، برای  $\alpha = 0.93$ 

| $t_r$ | $m_1(t_r)$    | $m_2(t_r)$   | $ m_2(t_r) - m_1^*(t_r) $ |
|-------|---------------|--------------|---------------------------|
| ۰/۰   | ۰/۰۷۶۷۸۲۴۸۴۲  | ۰/۰۰۵۸۹۵۵۴۹۹ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۰             |
| ۰/۱   | -۰/۰۶۶۶۴۰۹۴۷۰ | ۰/۰۰۴۴۴۱۰۱۵۸ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۷             |
| ۰/۲   | ۰/۰۴۱۱۳۷۹۱۶۰  | ۰/۰۰۱۶۹۲۳۲۸۱ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲             |
| ۰/۳   | ۰/۰۵۷۴۶۱۷۵۱۷۰ | ۰/۰۰۳۳۰۱۸۵۲۹ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۸             |
| ۰/۴   | ۰/۰۶۰۶۴۴۲۷۹۰  | ۰/۰۰۳۶۷۷۷۲۸۶ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۴             |
| ۰/۵   | ۰/۰۶۱۲۹۷۲۴۳۸  | ۰/۰۰۳۷۵۷۳۵۲۱ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲             |
| ۰/۶   | ۰/۰۶۰۷۷۱۹۱۲۳  | ۰/۰۰۳۶۹۳۲۲۵۳ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۴             |
| ۰/۷   | ۰/۰۵۷۸۸۱۹۷۴۱  | ۰/۰۰۳۳۵۰۳۲۲۹ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۵             |
| ۰/۸   | ۰/۰۴۹۰۹۱۲۴۷۱  | ۰/۰۰۲۴۰۹۹۵۰۵ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۱             |
| ۰/۹   | ۰/۰۶۶۶۶۹۶۱۴۸  | ۰/۰۰۴۴۴۴۸۳۷۵ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۷             |
| ۱/۰   | -۰/۰۱۰۸۷۱۱۹۷۱ | ۰/۰۰۰۱۱۸۱۸۲۹ | ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۶             |

جدول ۲ مقدار تابع هدف و زمان اجرا را نشان می‌دهد و می‌بینیم که برای اجرای برنامه زمان کمی نیاز است و این می‌تواند نوید بخش این باشد که روش مطرح شده برای مسائل با ابعاد بزرگ کارآیی مناسبی از نظر زمان داشته باشد و با توجه به قضیه ۳ می‌دانیم که  $m_1(t)$  همان کنترل بهینه است به شرطی که  $m_2(t) = m_1^*(t)$  لذا جدول ۳ درستی رابطه موجود در قضیه ۳ را نشان می‌دهد.

## ۶ نتیجه و جمع بندی

در این مقاله بهینه‌سازی نیمه معین مثبت برای حل یک مساله کنترل بهینه‌ی کسری به کار گرفته شده است. مدل ریاضی سیستم کنترلی کسری مربوط به فرآیند کنترلی راکتور مخزن همزن پیوسته‌ی همدم بوده است. ابتدا به وسیله‌ی روش گشتاورها یک مساله‌ی معادل برای کنترل بهینه‌ی کسری در نظر گرفته شده به دست آمد و سپس با گسسته‌سازی مساله‌ی معادل به دست آمده به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت دست پیدا کردیم. در گسسته‌سازی برای مشتق کسری ریمان - لیوویل تقریبی از مشتق کسری گرانیوالد-لتنیکوف و برای انتگرال موجود در تابع هدف از انتگرال گیری دوزنقه‌ای مرکب استفاده کردیم. نتایج عددی به دست آمده نشان از کارایی این روش برای حل مسایلی مشابه دارد. نکته‌ای که در این روش به آن توجه شده است ساختار چندجمله‌ای مدل ریاضی سیستم کنترلی موجود در مساله‌ی کنترل بهینه است، حال اگر مساله‌ی در یکی از شاخه‌های علوم مهندسی مطرح باشد به طوری که مدل ریاضی سیستم کنترلی دارای ساختار چند جمله‌ای نباشد آیا بازهم این روش کارآیی دارد؟ می‌تواند در پژوهش‌های بعدی مورد توجه قرار گیرد.

## منابع

- [۲۱] تواضعی، م. ص.، توکلی کاخکی، م.، (۱۳۹۴). سیستم‌ها و کنترل کننده‌های مرتبه کسری، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.
- [۲۸] حسن‌نژاد، س.، حیدری، ع.، (۱۳۹۳). حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه با استفاده از الگوریتم ژنتیک ترکیبی. مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، ۳ (۴۲)، ۱۲۵-۱۳۷.
- [۲۹] محمد زاده، ا.، پرز، ن.، حسینی ثانی، ک.، جاجرمی، ا.، (۱۳۹۵). کنترل بهینه دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری با استفاده از سری مودال توسعه یافته و استراتژی برنامه ریزی خطی. مجله کنترل، ۱۰ (۱)، ۵۱-۶۴.
- [1] Gregory, J. C., Lin, C., (1992). Constrained Optimization in the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Van Nostrand-Reinhold.
- [2] Hestenes, M. R., (1966). Calculus of Variations and Optimal Control Theory. John Wiley and Sons, New York.
- [3] Tricaud, C., Chen, Y., (2012). Optimal Mobile Sensing and Actuation Policies in Cyberphysical Systems. Springer-Verlag London Limited.
- [4] Agrawal, O. P., (2004). A general formulation and solution scheme for fractional optimal control Problems. Nonlinear Dyn, 38 (1-2), 323-337.
- [5] Agrawal, O. P., (2006). A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems. J Vibration Control, 14 (9-10), 1291-1299.
- [6] Tangpong, X. W., Agrawal, O. P., (2009). Fractional optimal control of a continuum system. ASME J Vibration Acoustics, 131(2), 21012-21018.
- [7] Agrawal, O. P., (2008). A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems. ASME J Dynamic Syst, Measurement, Control, 130 (1), 011010.1-011010.6.
- [8] Jelacic, D. Z., Petrovacki, N., (2009). Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems, Struct Multidisciplinary Opt, 38(6), 571-581.
- [9] Baleanu, D., Deftlerli, O., Agrawal, O.P., (2009) A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. J Vibration Control, 15(4), 583-597.
- [10] Agrawal, O. P., Baleanu, D., (2007). A hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems. J Vibration Control, 13(9-10), 1269-1281.
- [11] Frederico, G. S. F., Torres, D. F. M., (2008). Fractional optimal control in the sense of caputo and the fractional noethers theorem. Int Math Forum, 3(10), 479-493.

- [12] Yousefi, S. A., Lotfi, A., Dehghan, M., (2011). The use of a Legendre multiwavelet collocation method for solving the fractional optimal control problems. *J Vibration Control*, 17(13), 2059–2065.
- [13] Alipour, M., Rostamy, D., Baleanu, D., (2013). Solving multi-dimensional fractional optimal control problems with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices. *Journal of Vibration and Control*, 19(16), 2523-2540.
- [14] Keshavarz1, E., Ordokhani, Y., Razzaghi, M., (2015). A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials. *J Vibration Control*, DOI: 10.1177/1077546314567181.
- [15] Podlubny, I., (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, CA.
- [16] Dehghan, R., keyanpour, M., (2015). A numerical approximation for delay fractional optimal control problems based on the method of moments. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, doi:10.1093/imamci/dnv032.
- [17] Lasserre, J., (2010). *Moment Positive Polynomials and Their Applications*. Imperial College Press Optimization Series.
- [18] Henrion, D., (2013). *Optimization On Linear Matrix Inequalities for Polynomial Systems Control*. University of Toulouse France. [Online] Available: <http://homepages.laas.fr/henrion/>.
- [19] Mojica-Nava, E., Quijano, N., Rakoto-Ravalontsalama, N., (2014). A polynomial approach for optimal control of switched nonlinear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control* 24, 1797-1808.
- [20] Magin, R. L., (2006). *Fractional Calculus in Bioengineering*. Begell House Publishers, Redding, CT.
- [22] Kuntanapreeda, S., Marusak, P., (2012). Nonlinear extended output feedback control for CSTRs with van de Vusse reaction. *Computers and Chemical Engineering*, 41, 10– 23.
- [23] Craven, B. D., (1995). *Control and Optimization*. Chapman and Hall, Englewood Cliffs.
- [24] Fattorini, H. O., (1999). *Infinite Dimensional Optimization Theory and Optimal Control*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [25] Lasserre, J., (2001). Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM J. Optim*, 11, 796–817.
- [26] Meziat, R., Patino, D., Pedregal, P., (2007). An alternative approach for non-linear optimal control problems based on the method of moments. *Comput Optim Appl*, 38, 147—171.
- [27] Diethelm, K., Ford, N.J., Freed, A.D., Luchko, Y., (2005). Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194, 743-773.