

یک روش بر مبنای تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها با منابع محدود برای اولویت‌سازی پروژه

علی جهانی‌گی*^۱، زهرا مقدس^۲، محسن واعظ قاسمی^۳

۱- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان، گروه ریاضی، زاهدان، ایران

۲- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، گروه ریاضی، قزوین، ایران

۳- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، گروه ریاضی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۲ فروردین ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۱۵ شهریور ۱۳۹۴

چکیده

در شرایط اندازه‌گیری عملکرد، یک زیر گروه از راه حل‌های جایگزین از جانب یک سری انتخاب‌ها در یک محیط با منابع محدود مفید می‌باشد. این مطلب ضروری می‌باشد زیرا هر گاه ورودی و خروجی‌های چند گانه حضور دارند، ساختار مدل DEA فرصت انتخاب را بر اساس بهینه سازی تجمعی مرتبط با ورودی تجمعی فراهم می‌کند. در این مقاله، ۲ مثال در مورد الزامات منابع محدود بررسی خواهد شد. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به وسیله فضاسازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، منبع محدود، اولویت‌سازی.

۱ مقدمه

در این مقاله روشی معرفی می‌شود که کاربرد مورد نظر مربوط به تصمیم‌گیری چند معیاری (تصمیم‌گیری چند معیاری) چند معیاری است که آن شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌ها است. پروژه‌های شخصی (انفرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به دست آورد. که این امر برای معرفی زیر گروهی از پروژه‌ها مناسب می‌باشد. نمونه‌ای که برای تمامی منابع در دسترس توجیه پذیر می‌باشد. مشکل اولویت‌دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته است. روش ما در ارتباط با روش‌های موجود در ادبیات موضوع است. در مقالات موجود یک ارزیابی جمعی چند مرحله‌ای پیچیده و مدل انتخاب معرفی شده است. روش ما مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین است و به روش DEA-CCR پاییند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است. در این مقاله به ارایه دو مثال خواهیم پرداخت. اولین مورد شامل انتخاب از یک گروه مربوط به پروژه‌ها است، یک زیر گروهی که باید به کار گرفته شود. هر پروژه باید طبق استفاده از منابع ورودی چند گانه،

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mohamadjahantighi@yahoo.com

طراحی می‌گردد و ضمناً یک گروه از خروجی‌ها را تولید کند. در این روش هر زیرگروه پژوهه‌های را به کار می‌گیرد که می‌تواند از محدودیت‌های منابع به عنوان یک آیتم (پژوهه کامپوزیت) انتخاب کند. این پژوهه‌های کامپوزیتی به وسیله تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی می‌شوند. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به وسیله فضاسازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد. روش دوم شامل انتخاب یک گروه از بهترین سایتها برای تسهیلات خرد معین است. لذا مدل مربوط به انتخاب‌ها تعیین یک منبع محدود است.

چنگ و لی [۲] بر مبنای تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری فازی مدلی برای انتخاب پژوهه در زمینه انتخاب پرتفوی با در نظر گرفتن منبع محدود معرفی کرده‌اند. مالکی و همکاران [۳] در مقاله‌ای برای انتخاب پژوهه با در نظر گرفتن برنامه ریزی خطی فازی مدلی معرفی کرده‌اند. چانچی و همکاران [۴] در مقاله‌ای با ذکر این مطلب که روش‌های انتخاب پژوهه موجود در ادبیات موضوع قادر به در نظر گرفتن عدم قطعیت و اثر متقابل نبودند. لازم به ذکر است که برخی از روش‌های موجود عدم قطعیت را بدون در نظر گرفتن و اثر متقابل لحاظ کرده‌اند. در این مقاله نویسنده‌گان با در نظر گرفتن متغیرهای فازی این عدم قطعیت را لحاظ کرده‌اند. در بخش بعد به معرفی مفاهیم و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها خواهیم پرداخت. در ادامه اولویت‌سازی پژوهه بر مبنای تکنیک DEA با منابع محدود را معرفی و سپس نتیجه گیری ارایه می‌شود.

۲ مقدمه تحلیل پوششی داده‌ها

واحد تصمیم‌گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند (x_1, x_2, \dots, x_m)، بردار خروجی (y_1, y_2, \dots, y_u) را تولید می‌کند. منظور از واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس این است که واحدها عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های با جنس مشابه، خروجی‌های با جنس مشابه تولید می‌کنند. مانند شعبات یک بانک، کارخانجات یک شرکت خاص یا ادارات یک سازمان دولتی. از مثال‌هال مهم کاربرد تحلیل پوششی داده‌ها می‌توان به بررسی پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم‌گیرنده اشاره کرد، جهانی و همکاران [۱].

کارایی به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد، که به صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می‌شود (ورودی / خروجی = کارایی). کارایی مطلق یک DMU ، مقایسه عملکرد آن با استانداردهای کلی و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک DMU ، نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است.

در صورت وجود چند ورودی و چند خروجی برای واحد تصمیم‌گیرنده‌ی مورد نظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده‌ی خروجی به مجموع وزن‌دار شده‌ی ورودی به صورت

$$E_p = \frac{u_{1p}y_{1p} + \dots + u_{sp}y_{sp}}{v_{1p}x_{1p} + \dots + v_{mp}x_{mp}} \quad (1)$$

کارایی آن واحد را اندازه‌گیری می‌کند، که در آن u_r قیمت خروجی y_r (۱, ..., s)، y_r و v_i هزینه‌ی

ورودی آم (یعنی $x_i, i = 1, \dots, m$) است. کارایی فوق به کارایی اقتصادی معروف است.

کارایی نسبی، از تقسیم اندازه کارایی هر واحد به بزرگترین آنها حاصل می‌شود. بنابراین اندازه کارایی هر واحد، همواره کوچک‌تر یا مساوی با یک بوده و حداقل یک واحد، کارایی نسبی برابر یک دارد. به طور مثال کارایی نسبی واحد تصمیم‌گیرنده P به صورت زیر به دست می‌آید:

$$RE_p = \frac{E_p}{\max_j \{E_j\}} \quad (2)$$

تحلیل پوششی داده‌ها، امکاناتی را برای مطالعه واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی فراهم می‌آورد. اسلوب تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه جبر خطی بنا نهاده شده است و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد، تا از روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی خطی و قضایای دوآلیتی استفاده کرده و به این ترتیب منع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و هر خروجی مشخص کند.

تکنیک DEA همچنین فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گرو تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌کند. این همکاری‌ها می‌توانند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد. مجموعه فعالیت‌های شدنی، مجموعه امکان تولید نامیده شده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \{(X, Y) \in R^{m+s} \mid X \geq 0 \text{ تولید شود}, Y \geq 0 \text{ بتواند به وسیله } \theta \text{ تولید شود}\}.$$

مدل‌های DEA هر کدام به یک مجموعه امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه امکان تولید نیز به طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود.

مدل CCR اولین مدل DEA برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنزو و همکاران ارایه شد [۵].

اگر در T_{CCR} امکان تولیدی مانند (X, Y) یافت نشود که غالب بر (X_o, Y_o) باشد، یعنی هیچ (X, Y) یافت نشود که $(X, Y) \geq (X_o, Y_o)$ و نامساوی حداکثر در یکی از مؤلفه‌ها به صورت اکید برقرار باشد، آن‌گاه گوییم که (X, Y) کارای نسبی است. در غیر اینصورت ناکارا است. حالت اول به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \theta \\ & \text{s.t.} \\ & (\theta X_o, Y_o) \in T_{CCR} \end{aligned} \quad (3)$$

با توجه به تعریف کارایی نسبی و اصل شهودی تجزیه و با توجه به اینکه $(\theta X_o, Y_o) \in T_{CCR}$ ، مدل (۳)، به مدل (۴) تبدیل می‌شود. مدل (۴)، که به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت ورودی معروف است، همواره شدنی بوده و بهینه متناهی دارد و جواب بهین در شرط $1 \leq \theta^* < \infty$ صدق می‌کند.

$$\text{Min} \quad \theta$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta x_{io}, \quad i=1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro}, \quad r=1, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

شرط لازم کارایی تحت مدل فوق این است که $\theta^* = 1$. زیرا $1 = \theta^*$, به این معنی است که امکان کاهش متناسب در همه ورودی های DMU_o , در مجموعه امکان تولید T_{CCR} وجود ندارد. اگر $1 < \theta^*$, آن گاه DMU_o , ناکارا در ماهیت ورودی است و $(\theta^* - 1)$ مقدار ناکارایی تکنیکی در ماهیت ورودی است. DMU_o , کارای قوی CCR گویند اگر و فقط اگر توسط هیچ DMU عضو T_{CCR} مغلوب نگردد. برای هر DMU_o ($o \in \{1, \dots, n\}$), DMU_o یک مجموعه مرجع به صورت {حداقل در یک جواب بهین مدل $\lambda_j^* > 0$, باشد | $E_o = \{j \mid$ تعریف می شود.

در حقیقت مجموعه مرجع DMU_o عبارتست از DMU_j هایی که حداقل در یک جواب بهین مدل DMU_o در ارزیابی λ_j^* مقدار مثبت اختیار می کند. در ادبیات تحلیل پوششی داده ها ثابت شده است برای هر DMU_j ($j = 1, \dots, n$), $DMU_j \neq \emptyset$. برای اثبات مطلب به مرجع [۱] رجوع شود. مدل BCC توسط بنکر، چارنز و کوپر در سال ۱۹۸۴ مطرح شد [۳]. مرز کارایی مدل BCC به وسیله پوسته محاسبه DMU های مشاهده شده، گستردگی شود. فرم پوششی مدل BCC در ماهیت ورودی برای ارزیابی DMU_o به صورت زیر است:

$$\text{Min} \quad \theta$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta x_{io}, \quad i=1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro}, \quad r=1, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

دوآل مدل (5) که به مدل مضربی BCC در ماهیت ورودی معروف است، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & Max \quad \sum_{r=1}^s \mathbf{u}^t \mathbf{y}_{ro} + u_o \\
 & s.t. \\
 & \sum_{r=1}^s \mathbf{u}^t \mathbf{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m \mathbf{v}^t \mathbf{x}_{ij} + u_o \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m \mathbf{v}^t \mathbf{x}_{io} = 1, \\
 & v_i \geq 0, \quad u_r \geq 0, \quad i=1, \dots, m, r=1, \dots, s.
 \end{aligned} \tag{6}$$

DMU_0 در مجموعه امکان تولید BCC کارای تکنیکی است اگر و فقط اگر $\theta_{BCC}^* = 1$. در غیر این صورت DMU_0 ناکارا خواهد بود و $(\theta_{BCC}^* - 1)$ نشان دهنده میزان ناکارایی تکنیکی آن در ماهیت ورودی است.

۳ منبع محدود در DEA

کاربرد مورد نظر در این مقاله مربوط به تصمیم‌سازی (تصمیم‌گیری چند معیاری) چند معیاری است. این روش شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌ها است. پروژه‌های شخصی (انفرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به دست آورد. که این امر برای معرفی زیر گروهی از پروژه‌ها مناسب می‌باشد. نمونه‌ای که برای تمامی منابع در دسترس توجیه پذیر می‌باشد.

۳-۱ اولویت‌سازی پروژه با منابع محدود

مشکل اولویت دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته است. روش ما در ارتباط با روش‌های معرفی شده در ادبیات موضوع می‌باشد. در روش‌های معرفی شده موجود یک ارزیابی جمعی چند مرحله‌ای پیچیده و مدل انتخاب معرفی شده اند. روش ما که مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین است که به روش $DEA-CCR$ پابند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است.

مجموعه $P = \{1, \dots, k, |P|\}$ پروژه‌های پیشنهادی که هر کدام دارای خروجی $\{o, |o|, \dots, j, |o|\}$ و ورودی $I = \{1, \dots, i, |I|\}$ می‌باشد. پروژه (k) به وسیله خروجی‌های آن مشخص می‌گردد. که باید تولید شوند و همچنین وابسطه به ورودی‌های خود است که باید مصرف گردند. یک محدودیت (L_i) در کمیت ورودی i در پروژه‌ها وجود دارد و ما فرض می‌گیریم که حداقل یک پروژه با این محدودیت‌ها قابل اجرا است. هدف انتخاب یک زیرمجموعه $(S^* \subset P)$ است که به عنوان بهترین راه حل برای منابع در دسترس معرفی گردد. فرض کنید تمامی پروژه‌ها قابلیت اجرا شدن دارند و همگی آن‌ها دارای منابع محدود هستند و هم چنین فرض کنید پروژه‌ها مستقل هستند (تدالو ندارند) و اگر α, β انتخاب شوند خروجی‌ها می‌توانند طبق ورودی‌های دریافتی خروجی‌ها تولید کنند. اگر تابع کارایی در دسترس باشند $(\theta_k = \theta(\chi_{kL}, \gamma_{ki}, \chi_{ki}, \dots, \gamma_{kj}))$ در این صورت می‌توانند مقدار کارایی θ_k هر پروژه را محاسبه نمود. در نتیجه می‌تواند برای رتبه بندی پروژه‌ها

مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر آن S می تواند با یک روش مستقیم به دست آید. یک نمونه مشابه برای این شرایط می تواند مساله کوله پشتی با مدل ذیل باشد.

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{k \in p} C_k \theta_k \\ \text{s.t. } & \sum_{k \in p} C_k X_{ki} \leq L_i, \quad i \in I, \\ & C_k \in \{0, 1\}, \quad k \in p. \end{aligned} \tag{V}$$

خود ارزیابی در تحلیل پوششی داده ها به وسیله حل مساله متناظر هر پروژه امکان پذیر است [۵].

$$\begin{aligned} \text{Max } & h_k = \sum_{j \in o} u_{kj} y_{kj} \\ \text{s.t. } & \sum_{i \in I} y_{ki} x_{ki} = 1, \\ & \sum_{j \in o} u_{kj} y_{pj} - \sum_{i \in I} y_{pi} x_{pi} \leq 0, \quad p \in P, \\ & u_{kj} \geq 0, \quad v_{pi} \geq 0, \quad j \in o, \quad i \in I. \end{aligned} \tag{A}$$

به کمک مقدار محاسبه شده h_k می توان پروژه ها را رتبه بندی نمود. شرایطی را تصور کنید که در آن ۳ پروژه وجود دارند، هر کدام یک ورودی و یک خروجی دارد.

جدول ۱. داده های سه پروژه با یک ورودی و یک خروجی

DMU	X	Y	$e = \frac{y}{x}$
A	۴۰۰	۴۰۰	۱۰۰
B	۳۰۰	۲۲۵	۰/۷۵
C	۱۰۰	۲۶	۰/۲۶

می توان به سادگی دید که پروژه A نسبت به پروژه های B و C ارجحیت دارد. مقدار h_k می تواند یک رتبه بندی برای پروژه ها فراهم آورد ولی محدودیت منابع از به کار بردن این روش به طور مستقل می گردد. حال، یک مدل اولویت دهنی را به صورت زیر معرفی می کنیم. با توجه به اینکه پروژه ها مستقل هستند، هر زیر گروه P از مجموعه S پروژه ها می توانند به عنوان پروژه های بهینه در نظر گرفته شوند. پس به نظر می رسد تمام زیر مجموعه های ممکن از مجموعه مرجع را برای بهینه بودن چک نمود. این مورد با نام (A) P شناخته می شود و اساساً مجموعه توانی P قلمداد می شود. لذا برای هر یک از زیر مجموعه های

ممکن باید مساله ذیل حل گردد که در آن:

$$\frac{Y}{S_j} = \sum_{k \in s} y_{ki}, \quad X_{si} = \sum_{k \in s} x_{ki} \quad (9)$$

$$\text{Max } h_s = \sum_{j \in o} u_{sj} y_{sj}, \quad S \in P(A)$$

s.t.

$$\sum_{i \in I} V_{si} X_{si} = 1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in o} u_{sj} y_{pj} - \sum_{i \in I} V_{si} X_{pi} &\leq 0, \quad P \in P(A), \\ u_{sj} \geq 0, \quad v_{si} \geq 0, \quad j \in o, \quad i \in I. \end{aligned}$$

تعداد اعضای غیرتهی P برابر $1 - 2^{|p|}$ است. در ادامه به عنوان یک گام اولیه به سوی عملیاتی کردن تعداد محدودیت‌های (10) می‌تواند از $1 - 2^{|p|}$ به صورت زیر کاهش یابد. محدودیت‌ها در (10) به دو گروه تقسیم می‌شود: اولین گروه مرتبط با زیر مجموعه‌های تک عضوی p است در حالی که گروه دوم مرتبط زیر گروه‌های وابسته $\{1, 2\}$ و $\{3, 1, 2\}$ و ... است که به صورت معادلات زیر است:

$$\text{Max } h_s = \sum_{j \in o} u_{sj} y_{sj}, \quad S \in P(A)$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} v_{si} x_{si} &= 1, \\ \sum_{j \in o} u_{sj} y_{pj} - \sum_{i \in I} v_{si} x_{pi} &\leq 0, \quad p \in P \\ \sum_{j \in o} u_{sj} y_{qj} - \sum_{i \in I} v_{si} x_{qi} &\leq 0, \quad q \in P(A) = p', \quad P' = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{P\}\}, \\ u_{sj} \geq 0, \quad v_{sj} \geq 0, \quad j \in o, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (11)$$

واضح است که هر محدودیت در گروه دوم به عنوان یک ترکیب خطی از دو یا چند محدودیت در گروه اول می‌باشد. اگر محدودیت‌های گروه اول برقرار باشند، پس باید هر کدام از آن‌ها در گروه دوم نیز به کار گرفته شود. بنابراین، گروه دوم شامل تنها محدودیت‌های زاید می‌شود و می‌توانند حذف گردند. لذا مدل اولویت‌دهی برای پروژه‌ها به صورت ذیل است.

$$\text{Max } h_s = \sum_{j \in o} u_{sj} y_{sj} \quad S \in P(A)$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} v_{si} x_{si} &= 1, \\ \sum_{j \in o} u_{sj} y_{pj} - \sum_{i \in I} v_{si} x_{pi} &\leq 0, \quad p \in P, \\ u_{sj} \geq 0, \quad v_{sj} \geq 0, \quad j \in o, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (12)$$

حال باید به دنبال زیرمجموعه S بود که در شرایط مساله صدق کند. این زیرمجموعه S می‌تواند به وسیله این دو شرایط مشخص گردد. شرط (a): برای هر زیرمجموعه انتخاب شده مجموع ورودی باید در شرایط منابع در اختیار صدق کند. یعنی:

$$\forall i \in I, \sum_{k \in s} X_{ki} \leq L_i \quad (13)$$

شرط (b): برای هر پژوهه انتخاب نشده نتوان از منابع باقیمانده، آن را اجرا نمود. به عبارت دیگر ورودی هر پژوهه انتخاب نشده باید کوچک‌تر یا مساوی منابع باقیمانده باشد.

$$\forall p \in P - S, \exists i \in I \text{ such that } \sum_{k \in s \cup \{p\}} X_{jl} > L_i \quad (14)$$

شرط a یک نیاز واضح است در حالی که شرط b به این موضوع بر می‌گردد که تعداد پژوهه‌های انتخاب شده حداقل باشد. پس به جای معرفی زیرمجموعه‌های S و متعاقباً ارزیابی هر عضو آن توسط (۱۲)، این کار را با اصلاح مدل (۱۲) در یک چارچوب برنامه‌ریزی غیرخطی صفر-یک مانند (۱۵) انجام خواهیم داد. در اینجا C_k عدد یک است اگر پژوهه (K) در S قرار گیرد در غیر این صورت صفر است. در نهایت اینکه بهینه‌سازی در رخداد $v_i u_j C_k$ و $v_i u_j$ رخ خواهد داد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in o} u_j \left(\sum_{k \in p} C_k Y_{kj} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in o} v_j \left(\sum_{k \in p} C_k X_{ki} \right) = 1, \\ & \sum_{j \in o} u_j y_{pj} - \sum_{i \in I} v_i x_{pi} \leq 0, \quad p \in P, \\ & \sum_{k \in p} c_k x_{ki} + l_i = L_i, \quad i \in I, \\ & (1 - C_k) X_{ki} + M c_k + M d_{ki} \geq l_i + \frac{1}{M}, \quad k \in p, i \in I, \\ & \sum_{i \in I} d_{ki} \leq |I| - 1, \quad k \in p, \\ & c_k, d_{ki} \in \{0, 1\}, \quad k \in p, i \in I, \\ & u_j \geq 0, v_i \geq 0, L_j \geq 0, \quad j \in o, i \in I, \\ & M >> 0. \end{aligned} \quad (15)$$

قبل از تشریح این معادله به برخی از موضوعات اشاره می‌شود. مدل به دنبال بهترین زیرگروه ارزیابی شده و بر طبق شرایط a و b است. پس شرط a این محدودیت را معرفی می‌کند.

$$\sum_{k \in p} c_k x_{ki} + l_i = L_i \quad (16)$$

که l_i مربوط به متغیر کمکی منبع i است. شرط b مقداری مشکل‌تر است اما به وسیله این محدودیتها معرفی می‌شود:

$$(1-C_k)X_{ki} + Mc_k + Md_{ki} \geq l_i + \frac{1}{M}, \quad k \in p, i \in I, \quad (17)$$

$$\sum_{i \in I} d_{ki} \leq |I| - 1, \quad k \in p,$$

حال باید شرایط را برای $k \notin s$ و $c_k = 0$ و $x_{ki} \leq l_i$ بررسی کنید. اولین قید می‌تواند به وسیله $d_{ki} = 1$ حل شود که همین به M بزرگ مثبت در سمت چپ منتهی می‌گردد. به هر حال تاثیر محدودیت مانع دوم برای اطمینان بخشی در مورد (حداقل) یکی از مسیرهای $i \in I$, d_{ki} است که همچنان صفر باقی می‌ماند. از این رو به صورت خطی تعریف کرد بدیهی است یک مساله برنامه‌ریزی خطی پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به یک مساله برنامه‌ریزی صحیح مختلط می‌باشد. این خطی شدن شامل تغییرات زیر می‌شود:

$$a_{kj} = c_k u_j, b_{ki} = c_k v_i \quad (18)$$

مدل (۱۹) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{(k \in p, j \in o)} a_{kj} y_{kj} \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{(k \in p, i \in I)} b_{ki} x_{ki} = 1, \\ & \sum_{j \in o} u_j y_{pj} - \sum_{i \in I} v_i x_{pi} \leq 0, \quad p \in P \\ & \sum_{k \in p} c_k x_{ki} + l_i \leq L_i, \quad i \in I, \\ & (1-C_k) X_{ki} + Mc_{ki} + Md_{ki} \geq l_i + \frac{1}{M}, \quad k \in p, i \in I, \\ & \sum_{i \in I} d_{ki} \leq |I| - 1, \quad k \in p, \\ & c_k, d_{ki} \in \{0, 1\}, \quad k \in p, i \in I, \\ & a_{kj} \geq 0, \quad k \in p, j \in o, \\ & a_{kj} \leq Mc_k, \quad k \in p, j \in o, \\ & u_j \geq a_{kj}, \quad k \in p, j \in o, \\ & b_{ki} \leq Mc_k, \quad k \in p, i \in I, \\ & v_i \geq b_{ki}, \quad k \in p, i \in I, \\ & v_i \leq b_{ki} + M (1-C_k), \quad k \in p, i \in I, \\ & M \gg 0. \end{aligned} \quad (19)$$

در جایی که دو گروه از محدودیت‌ها به وسیله خطوط عمومی مشخص شده‌اند که در واقع نماد متغیرهای جدید a_{kj} , b_{kj} به جای متغیرهای اصلی c_k , u_i , v_i قلمداد می‌شود. قبل از به کارگیری این مدل در بخش بعدی این نکته شایان ذکر است که همسانی در ارزیابی به وضوح در مدل (۴) اولویت‌دهی دیده می‌شود هر پیشنهاد پروژه دارای یک حق برابر در شکل‌گیری فن آوری تولید در ترکیب با دیگر پروژه‌ها است که باستی در این انتخاب مورد ارزیابی قرار گیرد. این فرآیند تنها به داده‌های پروژه‌های مرتبط و منابع در دسترس بستگی دارد.

۲-۳ مدل پایه DEA

مدل تحلیل پوشی داده‌ها برای انتخاب پروژه به شرح ذیل است.

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{k \in S} [\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik}] / \sum_{k \in S} \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik} \\ \text{s.t. } & [\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik}] / \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik} \leq 1, \quad k \in K, \\ & \bar{\theta}_r \leq [\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik}] / \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik} \leq \bar{\theta}_r, \quad k \in S, \\ & \sum_{K \in S} x_{ik} \leq C_i, \quad i \in I, \\ & x_{ik} \geq L_i, \quad i \in I, \quad k \in S, \\ & x_{ik} \geq 0, \quad i \in I_i, \quad \mu_r, \quad v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, i. \end{aligned} \quad (20)$$

چنان که در ادبیات موضوع مطرح شده است وقتی پروژه‌ها یا *DMUs* ها بررسی شدند تکنولوژی تولید مناسب همان CRS چارنزن و همکارانش [۵] است. به طور مشابه می‌توان از تکنولوژی مختلف با فرض بازده به مقیاس افزایشی، کاهشی و یا متغیرمجموعه امکان تولید مختلف ساخت که به دنبال آن می‌توان مدل‌های دیگری از تحلیل پوشی داده‌ها را تیز طراحی نمود.

مقدار کران انتخاب کارایی $\bar{\theta}_r$ در (۲۰) برای انتخاب پروژه‌ها به وسیله مدیریت انتخاب می‌شود. برای مثال، سطح عملکرد واقعی برای هر پروژه $(k \in S)$ باید حداقل $\bar{\theta}_r = 80\%$ و بالاتر از یک مقدار مانند $\bar{\theta}_r$ برای هر پروژه $k \in S$ باشد، که به عنوان مقدار کوچکتر از واحد در نظر گرفته می‌شود. انتخاب $1 = \bar{\theta}_r$ باعث گردد پروژه‌های انتخاب شده کارا باشند. به طور معمول امتیاز عملکرد برای پروژه k به صورت ذیل خواهد بود.

$$e = \frac{\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk}}{\sum_{i \in I} v_i x_{ik}} \Rightarrow e = \frac{\left[\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in NOI} v_i x_{ik} \right]}{\sum_{i \in DI} v_i x_{ik}} \quad (21)$$

x_{ik} همان ورودی است که در اختیار سازمان قرار می‌گیرد. پس $I \subseteq I_1$ زیر گروه‌های ورودی برای مواردی است که باید تحمیل شده باشد در مورد مشکل مکان یابی، I_1 می‌تواند شامل ۲ ورودی و I_2 مکمل I_1 است.

می‌تواند مربوط به گروه واحدهای تصمیم گیرنده $\{k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_s\}$ و گروه سایتهای بالقوه $\{1, \dots, k_1\}$ باشد برای زیر مجموعه S ابتدا رابطه (۲۰) را با قید ذیل جایگزین می‌شود:

$$\sum_{k \in S} v_i x_{ik} + v_i s_i = v_i c_i, \quad i \in I \quad (22)$$

که در آن s_i یک متغیر کمکی متناظر با محدودیت $i \in I_1$ در (۲۰) است. سپس تمامی زیر گروههای احتمالی S معرفی می‌گردند و بعد از آن متغیرهای دودویی d_k توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$d_k = \begin{cases} 1 & \text{اگر فروشگاه } a \text{ در } k \text{ تعیین شده باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\max \sum_{k \in K_r} \left[\sum_{r \in R} d_k M_r y_{rk} - \sum_{i \in I} d_k v_i x_{ik} \right] \\ s.t.$$

$$\sum_{k \in K_r} \sum_{i \in I} d_k v_i x_{ik} = 1,$$

$$\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_r} v_i x_{ik} \leq 0, \quad k \in K_r,$$

$$\sum_{i \in I} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_r} d_k v_i x_{ik} - \bar{\theta}_r \sum_{i \in I_r} d_k v_i x_{ik} \leq 0, \quad k \in K_r,$$

$$\sum_{i \in I} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_r} d_k v_i x_{ik} - \bar{\theta}_r \sum_{i \in I_r} d_k v_i x_{ik} \geq 0, \quad k \in K_r,$$

$$\sum_{k \in K_r} d_k v_i x_{ik} + v_i s_i = v_i c_i, \quad i \in I_r,$$

$$d_k x_{ik} \geq d_k L_i, \quad i \in I_r, k \in K_r,$$

$$v_i s_i \leq v_i L_i - \frac{1}{M} + M d_k + M_{r_{ik}}, \quad i \in I_r, k \in K_r,$$

$$\sum_{i \in I_r} r_{ik} \leq |I_r| - 1, \quad k \in K_r,$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i \in I_r, k \in K_r,$$

$$M_r, v_i \geq E, \quad \forall r, i,$$

$$d_k \in \{0, 1\}, \quad \forall K.$$

(۲۳)

برای تسهیل در نوشتمن مساله خطی دودویی مختلط ابتدا به رابطه زیر توجه نمایید:

$$x_{ik} \leq M d_k, \quad i \in I, \quad k \in K, \quad (24)$$

سپس برای هر $i \in I$ می‌توان محصول $d_k x_{ik}$ را با x_{ik} جابه‌جا نمود.

اکنون مقدار y_{rk} را با $d_k y_{rk}$ جابه‌جا می‌شود و متغیر تصمیم گیری x_{ik} را نیز با $d_k x_{ik}$ جابه‌جا می‌نماییم. برای تکمیل این روش، متغیرهای دوتایی معرفی شده و محدودیت‌های جدید ذیل اضافه می‌شوند:

$$v_i s_i \leq v_i L_i - \frac{1}{M} + M d_k + M r_{ik}, \quad i \in I, \quad k \in K, \quad (25)$$

$$\sum_{i \in I} r_{ik} \leq |I| - 1, \quad k \in K, \quad (26)$$

می‌توانیم به واسطه رابطه (24) مشاهده کنیم که هر واحدی که عضو زیرمجموعه $(k \in s)$ است. می‌تواند $d_k = 1$ را داشته باشد. در غیر این صورت نیز برای تمامی آنها در $(k \in s)$ شرط $d_k = 0$ خواهد کرد، که این نشانگر این است $r_{ik} = 1$ می‌باشد. محدودیت (26) تنها اجازه می‌دهد که $|I| - 1$ متغیر دوتایی r_{ik} حداکثر یک باشد. پس هر واحدی که k را حداقل در یکی از ورودی‌های I داشته باشد باید متغیر کمکی $v_i s_i$ کمتر از مرز پایین تراز l_i می‌باشد.

برای هر $\{x_{ik}\}$ و $\{d_k\}$ مفروض، (به این معنی که متغیرها ثابت هستند) باید ذکر گردد که نتایج مربوط به مساله برنامه ریزی خطی کسری می‌تواند با یک مساله برنامه ریزی خطی معادل جایگزین شود. از وقته که این رابطه غیر کسری معادل باشد مقادیر x_{ik} و d_k را می‌توان بدون توجه به ارزش آنها در نظر گرفت. بنابراین این مساله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} c_{ik} + e_i &= c_i v_i, & i \in I, \\ c_{ik} - l_i b_{ik} &\geq 0, & i \in I_p, \quad k \in K, \\ v_i l_i - e_i + M d_k + M r_{ik} &\geq 1/M, & i \in I, \quad k \in K, \\ \sum_{i \in I} r_{ik} &\leq |I| - 1, & k \in K, \\ a_{rk} - M d_k &\leq 0, & r \in R, \quad k \in K, \\ \mu_r - a_{rk} + M d_k &\leq M, & r \in R, \quad k \in K, \\ \mu_r + a_{rk} &\geq 0, & r \in R, \quad k \in K, \\ b_{ik} - M d_k &\leq 0, & i \in I, \quad k \in K, \\ v_i - b_{ik} + M d_k &\leq M, & i \in I, \quad k \in K, \\ v_i - b_{ik} &\geq 0, & i \in I, \quad k \in K, \\ c_{ik} - M b_{ik} &\leq 0, & i \in I, \quad k \in K, \\ a_{rk}, b_{ik}, c_{ik}, e_i &\geq 0, \quad \mu_r \geq \epsilon, \quad v_i \geq \epsilon, & r \in R, \quad i \in I, \quad k \in K, \\ d_k, r_{ik} &\in \{0, 1\}, & c_i \in I, \quad k \in K. \end{aligned} \quad (27)$$

۴ نتیجه‌گیری

یک انتخاب چند معیاری را در نظر بگیرید که شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌ها است. توجه داشته باشید که پروژه‌های شخصی (افرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به دست آورند. از این رو مشکل اولویت‌دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته است. از آن رو در این مقاله روش معرفی شده مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین به منظور برطرف ساختن این مشکل می‌باشد. توجه داشته باشید که این روش همچنان به روش DEA-CCR پایبند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است.

در شرایط اندازه‌گیری عملکرد، یک زیر گروه از راه حل‌های جایگزین از جانب یک سری انتخاب و یک محیط با منابع محدود ضروری می‌باشد. وقتی ورودی و خروجی‌های چند گانه حضور دارند، ساختار مدل DEA فرصت انتخاب را بر اساس بهینه‌سازی تجمعی مرتبط با ورودی تجمعی فراهم می‌کند. در این مقاله، ۲ مثال در مورد الزامات منابع محدود بررسی خواهد شد. اولین مورد شامل انتخاب از منابع ورودی چند گانه، طراحی یک زیر گروهی که باید به کار گرفته شود. هر پروژه باید طبق استفاده از منابع ورودی چند گانه، طراحی می‌گردد و ضمناً یک گروه از خروجی‌ها را تولید کند. در این روش هر زیر گروه پروژه‌هایی را به کار می‌گیرد که می‌تواند از محدودیت‌های منابع به عنوان یک آیتم (پروژه کامپوزیت) انتخاب کند. این پروژه‌های کامپوزیتی به وسیله تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی می‌شوند. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به وسیله فضاسازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد. روش دوم شامل انتخاب یک گروه از بهترین سایت‌ها برای تسهیلات خرد معین است که مدل مربوط به انتخاب‌ها تعیین یک منبع محدود است.

منابع

- [1] جهان‌نیگی، م.ع.، مقدس، ز.، واعظ فاسی، م.، (۱۳۹۰). شاخص بهره‌وری مالموئیست چند مرحله‌ای. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴۶(۸)، ۷۰-۵۹.
- [2] Chang, P. T., Lee, J. H., (2012). A fuzzy DEA and knapsack formulation integrated model for project selection. *Computers & Operations Research*, 3, 112-125.
- [3] Maleki, I., Omrani, O., Ghodsi, R., Khoei, A., (2014). Project selection using fuzzy linear programming model. *International Journal of Operational Research (IJOR)*, 19, 211-233.
- [4] Ghapanchi, A. H., Tavana, M., Khakbaz, M. H., Lo, G., (2012). A methodology for selecting portfolios of projects with interactions and under uncertainty. *International Journal of Project Management*, 30, 791-803.
- [5] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making unit. *European Journal of operational research*, 2, 429-444.