

بهینه‌سازی هندسی تحت معادلات با مشتقات جزیی با داده‌های تصادفی

علی محمودی نهرانی^۱، محمد کیانپور^{۲*}

۱- دانشجوی دکترای، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

۲- استادیار، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۹ اسفند ۱۳۹۳

پذیرش مقاله: ۷ مرداد ۱۳۹۴

چکیده

مقاله حاضر بهینه‌سازی شکل هندسی سازه‌هایی را در نظر گرفته است که توسط معادلات با مشتقات جزیی در حضور داده‌های تصادفی، مدل‌سازی شده است. داده‌های تصادفی در پارامترها و ورودی‌های معادله با مشتقات جزیی، ظاهر می‌شود. مبانی نظری ارایه شده و با استفاده از آشفتگی روش همانی، مساله بهینه‌سازی شکل به دامنه ثابت تبدیل شده و سپس به صورت یک مساله کنترل بهینه تصادفی فرمول‌بندی شده است. داده‌های تصادفی به صورت میدان تصادفی در نظر گرفته شده و با استفاده از توسعی کارهونن-لویو^۱ تقریب زده شده است. کمی سازی عدم قطعیت توسط روش‌های غیر نفوذی مانند هم محلی تصادفی صورت پذیرفت. روش گرادیان برای بهینه‌سازی به کار گرفته و مثال عددی برای نشان دادن قابلیت کاربرد روش ارایه شده است.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی هندسی، معادله با مشتقات جزیی تصادفی، گستره‌سازی تصادفی، کنترل بهینه.

۱ مقدمه

مساله بهینه‌سازی شکل که در بخش‌های مختلفی از علوم مهندسی و فناوری مطرح است به صورت زیر بخش‌بندی می‌شود:

- مدل: اغلب به صورت معادله با مشتقات جزیی بیان می‌شود و به ما اجازه می‌دهد تارفار مکانیکی سازه‌ها را محاسبه و تحلیل کنیم.
- تابع هدف: که به دنبال یافتن مقدار کمینه و یا مقدار بیشینه آن هستیم.
- جهت قابل قبول بهینه‌سازی: که با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی که روی دامنه اعمال شده، به دست می‌آید.

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیک: Keyanpour@guilan.ac.ir

¹ Karhunen-Loeve

بهینه‌سازی شکل در بسیاری از صنایع، کاربردهای فراوانی دارد؛ اما بسیار پیچیده‌تر از بهینه‌سازی معمولی است و در آن‌ها متغیرها، ویژگی‌های مکانیکی مواد هستند. مساله‌های بهینه‌سازی شکل را به سه دسته کلی می‌توان تقسیم کرد:

- بهینه‌سازی شکل پارامتری: که در آن شکل‌ها با استفاده از تعداد کاوش یافته‌ای از متغیرها، پارامتری می‌شود (به عنوان مثال ضخامت، قطر و یا بعد)، که محدودیت آن‌ها تعداد قابل توجهی از شکل‌های قابل قبول را در نظر می‌گیرد [۱].
- بهینه‌سازی شکل هندسی: که در آن با شروع از یک شکل اولیه و با تغییرات قابل قبول مرزهای شکل (بدون این که توپولوژی شکل را تغییر دهیم) به شکل بهینه می‌رسیم [۲].
- بهینه‌سازی توپولوژی: در آن بدون محدودیت صریح و یا ضمنی، شکل بهینه را جستجو می‌کنیم و تغییرات توپولوژی شکل نیز در نظر گرفته می‌شود [۳].

بهینه‌سازی توپولوژی، کلی تر و در عین حال دشوارترین نوع بهینه‌سازی شکل است. در این مقاله به مطالعه بهینه‌سازی هندسی سازه‌ها با در نظر گرفتن پارامترهای تصادفی خواهیم پرداخت.

اولین بار هادامارد در سال ۱۹۱۰ از فرمول بندی ریاضی برای تحلیل حساسیت معادله با مشتق‌ات جزیی، نسبت به شکل دامنه استفاده کرد که به زمینه تحقیقاتی جدیدی به نام "طراحی بهینه شکل" انجامید. موضوع طراحی بهینه شکل که امروزه استفاده می‌شود از نتایج نظریه کنترل و بهینه‌سازی روی سیستم‌های توزیعی حاصل شده است [۴] و لذا بهینه‌سازی شکل را می‌توان شاخه‌ای از نظریه کنترل و بهینه‌سازی دانست. طراحی با استفاده از کمینه‌سازی یک معیار انجام می‌پذیرد که به متغیر حالت به عنوان جواب معادله با مشتق‌ات جزیی و تابع کنترل به عنوان شکل وابسته است.

برای محاسبه شرایط بهینگی، پیرونیو [۵]، سوکولوسکی [۶] و سیا [۷] برای مساله‌های پیوسته، ماروکو و دیگران [۸] برای مساله‌های گسسته، روش‌هایی را ارایه کرده‌اند. نتایج نظری برای وجود جواب در مقالات [۹-۱۲] به دست آمده است. برای مطالعه نظری مساله و بررسی وجود و یکتایی جواب و همچنین به دست آوردن شرایط بهینگی، دشواری‌هایی وجود دارد و برای حل آن‌ها لازم است توپولوژی مناسبی روی دامنه‌های شدنی اعمال گردد. راه حل مستقیمی برای این کار وجود ندارد؛ ولی روش‌هایی مانند نمایش دامنه به صورت توابع تراز [۱۳، ۱۴] و یا استفاده از تبدیل‌های مناسب [۱۵، ۱۶] معرفی شده است. توپولوژی‌های مختلفی نیز برای این کار پیشنهاد شده است که از میان آن‌ها می‌توان به توپولوژی کورانت [۱۷] که با توابع فاصله ایجاد شده است (مانند توابع مشخصه، اندازه هاسدورف و همچنین $W^{1,p}$ -توپولوژی)، اشاره کرد. برای این که بتوانیم از نتایج به دست آمده در زمینه حساب دیفرانسیل در اینجا استفاده کنیم و به تحلیل پیوستگی و دیفرانسیل پذیری شکل‌ها پردازیم، ابتدا باید فضاهایی با ساختار خطی معرفی شود. دو روش معمول برای تعریف مشتق‌های شکل در حیطه تبدیل‌ها عبارت است از:

- روش سرعت که توسط زولزیو معرفی شد [۱۸].
- روش آشفتگی همانی که توسط مورات و سیمون ارایه گردید [۱۵، ۱۶].

با توجه به این که در مسایل مهندسی، صنعتی و غیره، مدل‌ها شامل پارامترهای تصادفی است، مساله بهینه‌سازی شکل با در نظر گرفتن پارامترها و یا بارهای تصادفی توجه محققان را به خود جلب کرده است. مدل‌سازی این مساله‌ها با بهینه‌سازی شکل بر پایه قابلیت اعتماد آغاز شد که در آن محدودیت‌های قابلیت اعتماد بر اساس احتمال شکست معروفی می‌شود [۱۹]. به دلیل مشکلاتی که در تعریف تابع شکست وجود دارد، روش بهینه‌سازی استوار به عنوان جایگزین، توسعه داده شده است که اغلب برای سیستم‌ها بدترین حالت را در نظر می‌گیرد و به دنبال جواب غیر حساس نسبت به پارامترها می‌گردد [۲۰-۲۲]. برخی محققان نیز از روش برنامه‌ریزی تصادفی برای حل مسایل بهینه‌سازی شکل استفاده کرده‌اند [۲۳]. کمتر منبعی یافت می‌شود که پارامترهای تصادفی را به صورت میدان تصادفی در نظر بگیرد [۲۴].

در مقاله حاضر بر آنیم تا روشی که "آشفتگی همانی" نامیده می‌شود و توسط مورات و سیمون [۱۵, ۱۶] ارایه شده است در فضاهای بختر^۱ برای حل مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی توسعه دهیم. روش ذکرشده چارچوب روشی را بر اساس فضای توابع ارایه می‌دهد که شیوه‌های کنترل بهینه تصادفی (نام‌گذاری که برای مساله کنترل بهینه با داده‌های تصادفی به کار می‌بریم) را قابل استفاده می‌کند. در ادامه نشان خواهیم داد که با این روش چگونه گرددیان شکل به دست می‌آید.

با استفاده از فرمول‌بندی اشاره شده، این امکان را خواهیم داشت که از روش‌های کنترل بهینه تصادفی در بهینه‌سازی شکل تصادفی استفاده کنیم که در سال‌های اخیر توسعه داده شده است [۲۵-۲۷]. برای گسته‌سازی تصادفی از روش نمونه‌گیری مونت کارلو و روش هم محلی تصادفی [۲۸, ۲۹] استفاده کرده‌ایم. در پایان روش به دست آمده برای حل مساله بهینه‌سازی نازل با ورودی تصادفی به کاربرده شده و نتایج به دست آمده با شکل ارایه شده است.

ساختمار مقاله به این ترتیب است: در بخش دوم فرمول‌بندی عمومی مساله به همراه روش آشفتگی همانی برای پارامتری کردن مساله ارایه شده است. در بخش سوم، مساله در دامنه ثابت فرمول‌بندی شده و شرایط بهینگی به دست آمده است. در بخش چهارم گستگی تصادفی را مرور کرده‌ایم. بهینه‌سازی هندسی مقید به معادله با مشتقهای جزیی برای یک مدل خاص در بخش پنجم ارایه شده است و در بخش شش به عنوان مثال عددی، مساله بهینه‌سازی شکل نازل حل و نتیجه‌گیری از مقاله در بخش هفت گنجانده شده است.

۲ فرمول‌بندی مساله

۱-۲ فرمول‌بندی مساله

مساله بهینه‌سازی شکل عموماً به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\underset{\mathcal{S} \in \mathcal{O}_{ad}}{\text{Min}} \quad \{J(\mathcal{S}, u) \mid E(\mathcal{S}, u) = \cdot, \mathcal{S} \in \mathcal{O}_{ad}, u \in \mathcal{U}\}, \quad (1)$$

¹ Bochner space

که در آن \mathcal{U} فضای حالت مساله است و زیر فضایی از فضای هیلبرت انعکاسی در نظر گرفته خواهد شد. در مساله (1) ، $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ مرز آزاد^۱ (پارامتر طراحی) است و \mathcal{D} دامنه یا همان شکل مورد نظر است. در ادامه برای سادگی در فرمول نویسی پارامتر طراحی را نیز با \mathcal{D} نمایش خواهیم داد. \mathcal{O}_{ad} مجموعه همه شکل‌های شدنی است. \mathcal{D} شامل مرزهای آزاد است و در طول فرایند بهینه‌سازی، تغییر می‌کند و درنتیجه شکل سازه مورد نظر نیز تغییر می‌کند. E شامل نشان دهنده معادله حالت می‌باشد. در این نوع مسایل غالباً مجموعه شکل‌های شدنی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{O}_{ad} = \{\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d : \partial\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \int_{\mathcal{D}} dx = V\}. \quad (2)$$

که $d \in \{2, 3\}$ عددی طبیعی است. همان‌طور که گفته شد پارامتر طراحی، مرزهای آزاد دامنه است که در اینجا برای جلوگیری از زیاد شدن تعداد متغیرها، با همان دامنه \mathcal{D} نشان می‌دهیم در ادبیات کنترل بهینه دامنه \mathcal{D} در واقع همان کنترل مورد نظر است که ضمن برقراری معادله حالت و قیود فضای شدنی، باید تابع هدف مساله، J ، را کمینه کند. برای فرمول‌بندی مساله بهینه‌سازی شکل با پارامترهای تصادفی، متغیر حالت جواب یک معادله با مشتق‌ات جزئی تصادفی در دامنه \mathcal{D} است. اغلب متغیر حالت به فضای بanax (انعکاسی) $X(\mathcal{D})$ از توابع تعلق دارد. معادله با مشتق‌ات جزئی را که متغیر حالت در آن صدق می‌کند می‌توانیم با عملگر $\hat{E}(\tilde{u}, \mathcal{D}) = 0$ نشان دهیم، فرض می‌کنیم که \hat{E} شرایط اولیه (در صورت وجود) و مرزی را شامل می‌شود.

فضای کامل احتمال را با $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ نشان می‌دهیم، مجموعه Ω را در مقاله حاضر مجموعه پیشامدهای ω در نظر خواهیم گرفت، \mathcal{F} سیگما جبری از پیشامدهاست و $[\cdot, \cdot] \rightarrow \mathcal{F}$: μ اندازه احتمال است. مساله بهینه‌سازی شکل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱: فرض کنید $(\Lambda(\mathbb{R}^d), \mathcal{O}_{ad})$ مجموعه‌ای شامل دامنه‌های شدنی باشد (Λ مجموعه همه زیر مجموعه‌های است)، \mathcal{D} را دامنه کران‌دار با مرز لیپشیتس^۲ در نظر بگیرید. به علاوه برای هر $\mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}$ فضاهای بخرا $L^*(\Omega; Z(\mathcal{D}))$ و $L^*(\Omega; X(\mathcal{D}))$ را روی \mathcal{D} در نظر می‌گیریم. فرض کنید \tilde{J} تابع هدف مورد نظر باشد $\tilde{J} : \{(\tilde{u}, \mathcal{D}) | \tilde{u} \in L^*(\Omega; X(\mathcal{D})), \mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ،

و \hat{E} عملگری بین مجموعه‌هایی از فضاهای توابع شدنی باشد

$$\hat{E} : \{(\tilde{u}, \mathcal{D}) | \tilde{u} \in L^*(\Omega; X(\mathcal{D})), \mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}\} \rightarrow \{\tilde{z} | \tilde{z} \in L^*(\Omega; Z(\mathcal{D}))\},$$

آنگاه

$$\min \tilde{J}(\tilde{u}, \mathcal{D}) \text{ s.t. } \{\hat{E}(\tilde{u}, \mathcal{D}) = \cdot, \mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}\}, \quad (3)$$

را مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی می‌نامیم.

برای بررسی مسایل بهینه‌سازی شکل ابتدا لازم است تا یک تopolوژی مناسب روی مجموعه دامنه‌های شدنی، $\mathcal{O}_{ad} \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ قرار دهیم؛ ولی همان‌طور که اشاره شد، راه حل مستقیمی برای این کار وجود ندارد. برای به دست آوردن متغیرهایی از جنس زیرمجموعه‌های \mathbb{R}^d ، محققان روش‌های مختلفی را برای بیان دامنه‌ها پیشنهاد

¹ Free boundary

² Lipschitz

کرده‌اند. روشی که در اینجا به کار می‌بریم، تصویر تبدیلی^۱ از دامنه مرجع (که آن را با \mathcal{D}_{ref} نشان خواهیم داد) است که توسط مورات و سیمون [۱۵, ۱۶] معرفی شده است. بسته به نحوه نمایش دامنه، مفاهیم توبولوژیکی متفاوتی را می‌توان به کاربرد. در اینجا از اندازه کورانت و $W^{1,p}$ -توبولوژی استفاده می‌کنیم و با کمک روش آشفتگی همانی به فرمول‌بندی مساله در فضاهای بختر می‌پردازیم.

۲-۲ روش آشفتگی همانی

ابتدا دامنه مرجع کراندار $\mathcal{D}_{ref} \in \mathcal{O}_{ad}$ را ثابت می‌گیریم. فرض کنیم دامنه شدنی $\mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}$ می‌تواند با استفاده از تبدیل متاظر مناسب $\tau \in T(\mathcal{D}_{ref})$ مشخص شود به‌طوری‌که $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{D}_{ref})$ در اینجا $T(\mathcal{D}_{ref}) = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S\}$ تعريف شده است و S فضای بanax مناسبی است. به علاوه تبدیل‌های $\tau \in T(\mathcal{D}_{ref})$ را به مجموعه T_{ad} از توابع پیلیشیتس^۲ محدود می‌کنیم که $(\tau - id)$ به زیرمجموعه باز از S تعلق دارد. برای مرتبط کردن این روش با دامنه‌های شدنی، فرض می‌کنیم $T_{ad} = \{\tau \in T(\mathcal{D}_{ref}) \mid \tau(\mathcal{D}_{ref}) \in \mathcal{O}_{ad}\}$. با استفاده از این فرمول‌بندی، بهینه‌سازی شکل به صورت زیر تعريف می‌شود:

تعريف ۳: فرض کنید $T_{ad} \subset T(\mathcal{D}_{ref})$ مجموعه‌ای از تبدیل‌های شدنی از دامنه مرجع $\mathcal{D}_{ref} \in \mathcal{O}_{ad}$ باشد. به علاوه برای هر $\tau \in T_{ad}$ فرض کنیم $\tau \in T_{ad}$ فضای بختر باشند که روی $L^*(\Omega; X(\tau))$ و $L^*(\Omega; Z(\tau))$ تابع هدف است و \tilde{E} عملگری بین مجموعه‌هایی از فضاهای توابع شدنی است:

$$\tilde{E} : \{(\tilde{u}, \tau) \mid \tilde{u} \in L^*(\Omega; X(\tau)), \tau \in T_{ad}\} \rightarrow \{\tilde{z} \mid \tilde{z} \in L^*(\Omega; Z(\tau))\}.$$

در این صورت

$$\min \tilde{J}(\tilde{u}, \tau), \text{ s.t. } \tilde{E}(\tilde{u}, \tau) = \cdot, \tau \in T_{ad}, \quad (4)$$

را مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی با تبدیل‌ها می‌نامیم.

برای رسیدن به خوش‌تعريفی مساله باید در نظر بگیریم که با فرض $\tau_1, \tau_2 \in T_{ad}$ که $\hat{u} = \tilde{u}(\tau_1, \tau_2)$ باشد، آنگاه برای جواب‌های u_1 و u_2 از $\tilde{E}(u_1, \tau_1) = \cdot$ و $\tilde{E}(u_2, \tau_2) = \cdot$ داریم $\tilde{E}(u_1, \tau_1) = \tilde{E}(u_2, \tau_2)$. این فرض ضروری است؛ زیرا تبدیل‌های مختلفی که دامنه یکسان \hat{D} را بیان می‌کنند باید متغیر حالت یکسان \hat{u} را معرفی کنند، به‌طوری‌که $\hat{u} = u_1(\tau_1) = u_2(\tau_2)$. با وجود این، معمولاً این فرض به راحتی برقرار می‌شود. با این ساختار، τ متعلق به فضای آفین تبدیل‌هاست؛ ولی \hat{u} در مجموعه $\bigcup_{\tau \in T_{ad}} L^*(\Omega; X(\tau))$ قرار می‌گیرد که هنوز به هیچ توبولوژی‌ای مجهر نشده است. هدف تبدیل فضای $L^*(\Omega; X_{ref})$ به فضای $L^*(\Omega; X_{ref})$ است که توابع آن در دامنه مرجع \mathcal{D}_{ref} تعريف شده است. در واقع

¹ Projecting transformation
² biLipschitz

متغیر $(\Omega; X(\tau))$ با استفاده از تبدیل $\tilde{u} \in L^2(\Omega; X(\tau))$ که روی D_{ref} تعریف شده است تبدیل شود. برای رسیدن به این منظور $u = \tilde{u} o \tau$ که روی D_{ref} و در فضای آفینی از تبدیل‌ها $T(D_{ref})$ فضای بختر $(\Omega; X(\tau))$ قرار دارد، باید با دقت انتخاب شود. برای دست یافتن به این منظور معمولاً تبدیل‌ها طوری انتخاب می‌شود که درجه مشخصی از هموار بودن را داشته باشد. اغلب مجموعه تبدیل‌های شدنی T_{ad} باید به اندازه کافی کوچک انتخاب شود به این معنی که تنها آشفتگی‌های کوچک از دامنه مورد قبول قرار گیرد. برای این که بتوانیم فضای مناسبی از تبدیل‌ها $T(D_{ref})$ را تعریف کنیم، متناظر با فضای S فضای سوبولوف^۱ $\mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ را در نظر می‌گیریم. با به کار بردن $S = \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ به فرم فضای $\mathcal{V}^{k,\infty}$ خواهد بود که توسط مورات و سیمون در [۱۶] به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{V}^{k,\infty} := \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)\}.$$

که در آن $k \geq 1$. در اینجا برای هر تبدیل $\tau \in \mathcal{V}^{k,\infty}$ $(\tau - id) \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $id - id \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ ، از آنجاکه $id \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{V}^{k,\infty} = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d), D^\alpha \tau \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha \in \mathbb{N}_+^d, 1 \leq |\alpha| \leq k\}, \quad (5)$$

به علاوه $\mathcal{V}^{k,\infty}$ می‌تواند به صورت زیر تعریف شود [۱۰ و ۱۶]:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{k,\infty} &= \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d), D^\alpha \tau \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \\ &\quad \sup_{x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \frac{\|D^\alpha \tau(y) - D^\alpha \tau(x)\|}{\|y - x\|} < +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}_+^d, 1 \leq |\alpha| \leq k\}, \end{aligned}$$

حداقل فرض لازم برای تبدیل‌ها، به این صورت است که T_{ad} زیرمجموعه‌ای از $T^{k,\infty} := \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \tau \in \mathcal{V}^{k,\infty}, \tau^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\infty}\}$ باشد که $1 \leq k \leq n$ ؛ بنابراین رابطه زیر را داریم: $T_{ad} \subset T^{k,\infty} \subset \mathcal{V}^{k,\infty} = T(D_{ref}) = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S\}$.

که در آن $S = \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ فضای سوبولوف است. توجه کنید که فضای آفین $T(D_{ref})$ (و بنابراین T_{ad}) می‌تواند به توپولوژی‌ای که از فضای جابه‌جایی S به ارث رسیده، مجهز شود. با توجه به حفظ هموار بودن مرز و منظم بودن توابع تبدیل، مورات و سیمون در [۱۶] نتایج پایه‌ای را برای تکمیل بحث بررسی کردند.

^۱ Sobolev space

۳-۲ دامنه‌های تبدیل، مرزها و توابع

برای دامنه کراندار \mathcal{D}_{ref} و $\tau \in T^{k,\infty}$ مجموعه $\mathcal{D}_{ref}(\tau)$ نیز دامنه کراندار است. به علاوه برای منظم بودن دامنه‌ها نتایج زیر را داریم:

لم ۱: فرض کنید \mathcal{D}_{ref} دامنه کرانداری با مرز $W^{k,\infty}$ باشد که $k \geq 1$. و همچنین فرض کنیم $\tau \in T^{k,\infty}$ در این صورت $\tau(\mathcal{D}_{ref})$ دامنه‌ای با مرز $W^{k,\infty}$ خواهد بود [۱۶].

در صورتی که تبدیلهای $(\mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))$ به اندازه کافی کوچک باشند، دامنه‌های لیپشیتس حفظ می‌شود (ر.ک. لم ۳ در [۳۰]).

لم ۲: فرض کنید \mathcal{D}_{ref} دامنه کرانداری با مرز لیپشیتس باشد در این صورت ثابت $\langle c(\mathcal{D}_{ref}) \rangle < ۱$ وجود دارد که برای هر $\tau \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ داریم: $\|\tau - id\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} < c(\mathcal{D}_{ref})$ و $\tau(\mathcal{D}_{ref})$ دامنه کراندار با مرز لیپشیتس است [۳۰].

اگون تبدیل تابع به دامنه مرجع را تحلیل می‌کنیم. فرض کنید $\tilde{f} : \Omega \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابعی با دامنه $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{D}_{ref})$ باشد که $\tilde{f} \in L^1(\Omega; L^1(\tau))$. برای نگاشت داده شده $\tau \in T^{k,\infty}$ تابع تبدیل متناظر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f : \Omega \times \mathcal{D}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(\omega; x) := (\tilde{f} \circ \tau)(\omega; x) = \tilde{f}(\omega; \tau(x)), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

در این صورت f یک بازگشت^۱ از \tilde{f} با τ است. اگر f دیفرانسیل پذیر باشد، مشتق‌ها را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$D_{\tilde{x}} \tilde{f}(\omega; \tau(x)) = D_x f(\omega; x) \tau'(x)^{-1}, \quad \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}(\omega; \tau(x)) = \tau'(x)^{-T} \nabla_x f(\omega; x), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

که در آن $\tilde{x} = \tau(x)$ متغیر فضای معین روی \mathcal{D}_{ref} است. مورات و سیمون تأثیر تبدیل، روی منظم بودن تابع را بررسی کرده‌اند. مشابه لم ۴.۱ از [۱۶] داریم:

لم ۳: فرض کنید \mathcal{D} دامنه‌ای باز باشد همچنین $\tau \in T^{1,\infty}$ و $1 \leq p \leq \infty$ آنگاه

$$f \in L^p(\Omega; \tau(\mathcal{D})) \Leftrightarrow f \circ \tau \in L^p(\Omega; L^p(\mathcal{D})),$$

$$f \in L^p(\Omega; W^{1,p}(\tau(\mathcal{D}))) \Leftrightarrow f \circ \tau \in L^p(\Omega; W^{1,p}(\mathcal{D})),$$

. $f \in L^p(\Omega; W^{1,p}(\tau(\mathcal{D}))) \Leftrightarrow f \circ \tau \in L^p(\Omega; W^{1,p}(\mathcal{D}))$ اگر $p \in (1, +\infty)$ آنگاه

این لم بسیاری از ابزارهای مورد نیاز برای بهینه‌سازی شکل را (که در آن متغیر حالت معادله با مشتق‌ات جزیی موردنظر به فضاهای بختر $L^p(\Omega; W^{1,p}(\mathcal{D}))$ یا $L^p(\Omega; L^p(\mathcal{D}))$ تعلق دارد) فراهم می‌کند.

^۱ pulback

۳ فرمول بندی در دامنه ثابت

اکنون می‌توانیم مساله بهینه‌سازی را به طور کامل روی دامنه ثابت D_{ref} (مرجع) تعریف کنیم. این کار با انتقال معادله با مشتقهای جزئی موردنظر بر روی دامنه مرجع، انجام می‌گیرد. با توجه به مساله (۴) عملگر \tilde{E} بین فضاهای \tilde{E} صورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{E} : \{(\tilde{u}, \tau) | \tilde{u} \in L^r(\Omega; X(\tau)), \tau \in T_{ad}\} \rightarrow \{\tilde{z} | \tilde{z} \in L^r(\Omega; Z(\tau))\}.$$

در ادامه از نماد T_{ref} برای نمایش (D_{ref}) استفاده خواهیم کرد. اکنون فضاهای (τ) و $(Z(\tau))$ را به فضاهای ثابت (X_{ref}) و $L^r(\Omega; Z_{ref}) = \{\tilde{u}\tau : \tilde{u} \in L^r(\Omega; X(\tau))\}$ متقل کرده‌ایم، حال $E : L^r(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^r(\Omega; Z_{ref})$ داشته باشیم $\tilde{u} \in L^r(\Omega; X(\tau)) \mapsto u := \tilde{u}\tau \in L^r(\Omega; X_{ref})$ و هر $\tau \in T_{ad}$ داشته باشیم $E(u, \tau) = \cdot \Leftrightarrow \tilde{E}(\tilde{u}, \tau) = \cdot$.

به‌طور مشابه تابع هدف $J : X_{ref} \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$ برای $u = \tilde{u}\tau \in L^r(\Omega; X_{ref})$ و $\tau \in T_{ad}$ به صورت $J(u, \tau) = \tilde{J}(\tilde{u}, \tau)$ تعریف می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم که $L^r(\Omega; Z(\tau))$ می‌تواند به‌طور مشابه متقل شود. اکنون مساله (۴) را می‌توانیم به صورت زیر بیان کیم:

تعریف ۳: مساله کمینه‌سازی

$$\min J(u, \tau) \quad \text{s.t. } E(u, \tau) = \cdot, \tau \in T_{ad}, \quad (6)$$

که در آن $E : L^r(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^r(\Omega; Z_{ref})$ تابع هدف است و $J : X_{ref} \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$ مساله بهینه‌سازی شکل با تبدیل‌ها روی دامنه ثابت نامیده می‌شود.

در این فرمول بندی یک مساله بهینه‌سازی روی دامنه ثابت در فضای توابع خواهیم داشت که در آن τ نقش متغیر کنترل را در مساله دارد؛ بنابراین می‌توانیم شیوه‌های کنترل بهینه را برای به دست آوردن شرایط بهینگی به کار ببریم و در ادامه از الگوریتم‌های بهینه‌سازی برای حل آن استفاده کنیم. توجه داریم که در مقابل سایر بردها و فضاهای تصویر از J و E ، فضای آفین T_{ref} فضای برداری نخواهد بود. در واقع داریم:

$$T_{ref} = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d | (\tau - id) \in S\} = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d | \tau = id + \hat{\tau}, \hat{\tau} \in S\} = id + S,$$

با وجود این، از آنجاکه یک نگاشت یک-به-یک بین تبدیل $\tau \in T_{ref}$ و جایه‌جایی متناظر $\tau - id = \hat{\tau}$ داریم، می‌توانیم T_{ref} را با فضای بanax S مشخص کنیم. از آنجاکه می‌خواهیم از شیوه‌های کنترل بهینه برای تحلیل مساله بهینه‌سازی شکل استفاده کنیم، می‌توانیم از این موضوع که برای E و J مشتقهای جهتی نسبت به τ در تمام جهت‌ها، در فضای بanax S قابل محاسبه هستند، استفاده کنیم. بنابراین می‌توانیم از جفت دوگان برای فضای بanax S در همه جهت‌ها نسبت به τ استفاده کنیم. به عبارت دیگر $\langle J_\tau(u, \tau), v \rangle_{S^*, S}$ و $\tau \in T_{ad}$ و $u \in L^r(\Omega; X_{ref})$ برای هر $v \in S$ خوش تعریف است. اکنون معادله حالت را با فرم تغییری

$$\langle \tilde{E}(\tilde{u}, \tau), \tilde{v} \rangle_{L^*(\Omega; Z(\tau))} = \cdot, \quad \forall \tilde{v} \in L^*(\Omega; Z(\tau)^*), \quad (7)$$

بیان می کنیم. نماد $\langle \cdot, \cdot \rangle$ زوج دوگان است و $Z(\tau)^*$ فضای مناسبی از توابع آزمون است که بر روی (\mathcal{D}_{ref}) با $\tau \in T_{ad}$ تعریف شده است. مانند متغیر حالت، توابع آزمون را نیز از \mathcal{D}_{ref} برای هر $x \in \mathcal{D}_{ref}$ با استفاده از بازگشت $v(x) := (\tilde{v}o\tau)(x)$ تبدیل می کنیم که در آن \tilde{v} توابع آزمون برای مساله ای هستند که روی $\tau \in T_{ad}$ تعریف شده است. حال $E(u, \tau)$ برای هر $\tilde{v} \in L^*(\Omega; Z(\tau)^*)$ و هر $\tau \in T_{ad}$ به صورت زیر است:

$$\langle E(\tilde{u}o\tau, \tau), \tilde{v}o\tau \rangle_{L^*(\Omega; Z_{ref})} := \langle \tilde{E}(\tilde{u}, \tau), \tilde{v} \rangle_{L^*(\Omega; Z(\tau))}, \quad \forall \tilde{u} \in L^*(\Omega; X(\tau)),$$

مفروضات زیر را داریم:

برای هر $\tau \in T_{ad}$ $L^*(\Omega; X_{ref})$ را طوری انتخاب می کنیم که •

$$L^*(\Omega; X_{ref}) \subset \{\tilde{u}o\tau \mid \tilde{u} \in L^*(\Omega; X(\tau))\}.$$

برای هر $\tau \in T_{ad}$ $L^*(\Omega; Z_{ref})$ را طوری انتخاب می کنیم که •

$$L^*(\Omega; Z_{ref}^*) = \{\tilde{v}o\tau \mid \tilde{v} \in L^*(\Omega; Z(\tau)^*)\}.$$

جواب $(\tilde{u}(\tau))$ از معادله •

$$\tilde{E}(\tilde{u}(\tau), \tau) = \cdot. \quad (8)$$

برای هر $\tau \in T_{ad}$ در رابطه $\tilde{u}o\tau \in L^*(\Omega; X_{ref})$ صدق می کند.

فرض کنید $\tau \in T_{ad}$ در این صورت معادله حالت تبدیل یافته، در فرم تغییری به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle E(u, \tau), v \rangle_{L^*(\Omega; Z_{ref})} = \cdot, \quad \forall v \in L^*(\Omega; Z_{ref}^*), \quad (9)$$

با این ترتیب معادله (9) در واقع برابر (8) است؛ $(\tilde{u}(\tau))$ مساله (8) را حل می کند اگر و فقط اگر $u = \tilde{u}(\tau)o\tau$ مساله (9) را حل کند. بر عکس $u(\tau) \in L^*(\Omega; X_{ref})$ مساله (9) را حل می کند اگر و فقط اگر $\tilde{u}(\tau)o\tau^{-1}$ مساله (8) را حل کند.

۳-۱ تبدیل فرم تغییری به معادله حالت

معمولاییک فرم تغییری صرف بعد از تبدیل به دامنه مرجع، با استفاده از قاعده تبدیل برای انتگرالها و مشتقها، از معادله حالت اولیه به دست می آید. فرض کنید $\tilde{f} \in L^*(\Omega; L^*(\mathcal{D}_{ref}))$ و $\tau \in T^{1,\infty}$ ، سپس با استفاده از قاعده تبدیل برای انتگرالها $f = (\tilde{f}o\tau)|_{\Omega \times \mathcal{D}_{ref}}$ انتگرال پذیر است:

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{D}_{ref}} (\tilde{f}o\tau)(\omega; x) dx \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{D}_{ref}} f(\omega; x) |\det(\tau^{-1})'(x)| dx \mu(d\omega), \quad (10)$$

در تحلیل ویژگی های دیفرانسیل پذیری مساله بهینه سازی (6) بررسی دیفرانسیل پذیری $E(u, \tau)$ نسبت به u و τ بسیار مفید خواهد بود. برای انتقال فرم تغییری معادله حالت از دامنه \mathcal{D}_{ref} به دامنه مرجع

تبديل برای انتگرال‌ها به کار می‌رود. در این حالت دیفرانسیل پذیری نگاشته‌ای $|\det \tau'| \rightarrow \tau$ و

$\tau'(\tau^{-1}) \rightarrow \tau$ باید توجه شود؛ بنابراین لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۴: (الف) فرض کنید $\tau \in T^{1,\infty}$ آنگاه $\delta > 0$ وجود دارد که

$$|\det \tau'| \geq \delta, \quad a.a. \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

(ب) فرض کنید $k \geq 1$ ، نگاشت $\tau \in T^{k,\infty}$ از $g_1(\tau) = \det \tau'$ برای هر

دیفرانسیل پذیر است. به علاوه برای هر $\varphi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ داریم:

$$g'_1(\tau)\varphi = \text{tr}((\tau^{-1})'\varphi') |\det \tau'|, \quad (11)$$

(پ) فرض کنید $k \geq 1$ ، نگاشت $\tau \in T^{k,\infty}$ از $g_2(\tau) = (\tau^{-1})'$ برای هر

دیفرانسیل پذیر است. به علاوه برای هر $\varphi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ داریم:

$$g'_2(\tau)\varphi = -(\tau^{-1})'\varphi'(\tau^{-1})', \quad (12)$$

برهان. (الف) از قسمت (ii) در برهان لم ۴.۲ در مرجع [۱۶] آمده است. دیفرانسیل پذیری فرشت در قسمت (ب)

و (پ) نیز از لم‌های ۴.۲ و ۴.۳ همین منبع به دست می‌آید.

اگر تبدیل τ دامنه‌ای را نشان دهد که بسیار به دامنه مرجع نزدیک است، آنگاه $\det \tau' \geq \delta > 0$ و می‌توانیم قدر مطلق را از (11) حذف کنیم.

۲-۳ مساله کاهش یافته، وجود جواب‌ها و شرایط بهینگی

فرض کنید $L^*(\Omega; X_{ref})$ و Z_{ref} فضاهای بخزن باشند و $T_{ref} = id + S$ در این صورت مساله (۶) یک مساله کنترل بهینه با کنترل τ و حالت (τ, u) است و می‌توانیم از نظریه کنترل بهینه برای تحلیل وجود جواب و شرایط بهینگی استفاده کنیم. مطابق معمول ابتدا مجموعه‌های شدنی، جواب‌های بهینه و عملگر کنترل-به-حال (عملگر طراحی-به-حال) را معرفی می‌کنیم.

تعريف ۴: مجموعه $\mathcal{G} = \{(u, \tau) \in L^*(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \mid E(u, \tau) = 0, \tau \in T_{ad}\}$ مجموعه شدنی مساله (۶)

می‌نامیم. به علاوه $(\bar{u}, \bar{\tau})$ را جواب بهینه سرتاسری می‌نامیم هرگاه:

$J(\bar{u}, \bar{\tau}) \leq J(u, \tau), \quad \forall (u, \tau) \in \mathcal{G}$ همچنین $\bar{u} \in \mathcal{G}$ را جواب‌های بهینه موضعی می‌نامیم اگر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$J(\bar{u}, \bar{\tau}) \leq J(u, \tau), \quad \forall (u, \tau) \in \mathcal{G} \cap L^*(\Omega; X_{ref}) \times B_{||.||_S}(\bar{\tau}, \epsilon),$$

اگر برای هر $\tau \in T_{ad}$ ، حالت یکتایی $u(\tau) \in L^*(\Omega; X_{ref})$ وجود داشته باشد به طوری که

آنگاه عملگر یکتای طراحی-به-حال زیر را معرفی می‌کنیم:

$$S_u : T_{ad} \rightarrow L^*(\Omega; X_{ref}), \quad \tau \mapsto u(\tau),$$

به علاوه می‌توانیم مساله بهینه‌سازی شکل کاهش یافته را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\min j(\tau) := \min J(S_u(\tau), \tau) \quad \text{s.t. } \tau \in T_{ad}. \quad (13)$$

براندنبرگ در [۳۱] چارچوبی را معرفی کرده است که وجود جواب برای مساله بررسی می‌شود:

لم ۵: فرض کنید S فضای بanax باشد، $T_{ad} = id + S$ و $T_{ref} = L^*(\Omega; X_{ref})$ فضای بختر انعکاسی باشد. به علاوه معادله حالت $E : L^*(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^*(\Omega; Z_{ref})$ و تابع هدف $J : L^*(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. عملگر جواب $S_u : T_{ad} \rightarrow L^*(\Omega; X_{ref})$ را پیوسته در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید \bar{S} فضای بanax انعکاسی با جانشانی فشرده $S \mapsto \bar{S}$ باشد و $\bar{T}_{ad} \subset id + \bar{S}$ ناتهی، پسته، کراندار و محدب باشد که $\bar{T}_{ad} \cap T_{ad} \neq \emptyset$ در آنگاه مساله بهینه‌سازی شکل (۱۳) جواب بهینه سرتاسری دارد.

برهان لم در منبع [۳۱] با استفاده از شیوه کنترل بهینه ارایه شده است.

برای به دست آوردن شرایط بهینگی فرض زیر را داریم:
فرض ۱:

۱. مجموعه $T_{ad} \subset T_{ref}$ ناتهی، پسته و محدب است.

۲. تابع هدف $E : L^*(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^*(\Omega; Z_{ref})$ و $J : L^*(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر هستند.

۳. همسایگی باز \tilde{T}_{ref} از $T_{ad} \subset T_{ref} \subset T_{ad}$ با درد \tilde{T}_{ref} به طوری که عملگر طراحی-به-حالت موجود و $S_u : \tilde{T}_{ref} \rightarrow L^*(\Omega; X_{ref})$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است.

۴. مشتق $(E_u(u(\tau), \tau), \tau \in T_{ad})$ برای هر $u(\tau)$ یک-به-یک است و $u(\tau) = S_u(\tau)$.

برای به دست آوردن شرایط بهینگی، تابع لاغرانژ $\mathcal{L} : L^*(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \times L^*(\Omega; Z_{ref}) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(u, \tau, \lambda) := J(u, \tau) + \langle \lambda, E(u, \tau) \rangle_{L^*(\Omega; Z_{ref})}, \quad (14)$$

تحت فرض ۱، جواب بهینه موضعی $(\bar{u}, \bar{\tau}) \in L^*(\Omega; X_{ref}) \times T_{ad}$ از مساله (۱۳) با در نظر گرفتن حالت الحاقی مناسب $(\bar{\lambda} \in L^*(\Omega; Z_{ref}^*))$ در شرایط لازم بهینگی مرتبه اول زیر که شرایط کاروش-کان-تاکر نیز نامیده می‌شود، صدق می‌کند:

$$\langle \mathcal{L}_\lambda(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \delta\lambda \rangle_{L^*(\Omega; Z_{ref})} = \langle E(\bar{u}, \bar{\tau}), \delta\lambda \rangle_{L^*(\Omega; Z_{ref})} = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_u(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \delta u \rangle_{L^*(\Omega; X_{ref})} &= \langle J_u(\bar{u}, \bar{\tau}), \delta u \rangle_{L^*(\Omega; X_{ref})} + \langle \bar{\lambda}, E_u(\bar{u}, \bar{\tau}) \delta u \rangle_{L^*(\Omega; Z_{ref})} = 0, \\ \langle \mathcal{L}_\tau(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \hat{\tau} - \bar{\tau} \rangle_S &= \langle J_\tau(\bar{u}, \bar{\tau}) + E_\tau(\bar{u}, \bar{\tau}) \bar{\lambda}, \hat{\tau} - \bar{\tau} \rangle_S \geq 0, \quad \forall \hat{\tau} \in T_{ad}, \end{aligned}$$

که در آن اولین معادله، معادله حالت سیستم است و دومین معادله، معادله الحاقی است. معادله آخر برای ساختارهای مناسب S و T_{ad} می‌تواند به صورت معادله طراحی نوشته شود.

۳-۳ محاسبه مشتق شکل مرتبه اول

تحت فرض ۱ مشتق‌های تابع هدف کاهش یافته $J(u(\tau), \tau) := J(u(\tau), \tau)$ را می‌توان مانند معمول با استفاده از قاعده زنجیره‌ای محاسبه کرد و $u(\tau) = S_u(\tau)$ می‌تواند به صورت نماد جایگزینی برای عملگر طراحی-به-حالت به کار رود. در حقیقت برای مشتق‌های $j \in \tau \in T_{ad}$ در جهت $\delta\tau$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle j'(\tau), \delta\tau \rangle_S &= \langle J_u(u(\tau), \tau), u'(\tau) \delta\tau \rangle_{L^2(\Omega; X_{ref})} + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S, \\ &= \langle u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S, \\ &= \langle u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) + J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S, \\ &\text{که در آن } u'(\tau) \in \mathcal{Y}(S, L^2(\Omega; X_{ref}))^* \text{ عملگر الحقیقی است (توجه کنید)} \\ &\text{که در اینجا } \mathcal{Y} \text{ مجموعه همه عملگرهای خطی پیوسته بین دو فضای است؛ بنابراین مشتق کاهش یافته} \\ &\quad j'(\tau) \in S^* \text{ برابر خواهد بود با} \end{aligned}$$

$$j'(\tau) = u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) + J_\tau(u(\tau), \tau). \quad (15)$$

اغلب محاسبه کارای عبارت دوم در (15) در دسترس است. برای عبارت اول از روش الحقیقی استفاده خواهیم کرد تا از محاسبه مستقیم $(\tau)' u'$ خودداری شود. کاربرد روش الحقیقی در کنترل بهینه معمول و بر اساس ملاحظات زیر است:

مشتق معادله حالت $E(u(\tau), \tau) = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$E_u(u(\tau), \tau) u'(\tau) = -E_\tau(u(\tau), \tau), \quad (16)$$

و بنابراین $E_u(u(\tau), \tau)^* E_u(u(\tau), \tau) = -E_\tau(u(\tau), \tau)^* E_\tau(u(\tau), \tau)$. حال معادله الحقیقی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$E_u(u(\tau), \tau)^* \lambda = -J_u(u(\tau), \tau).$$

اکنون با فرض ۱، عملگر $E_u(u(\tau), \tau)^*$ پوشاست. بنابراین معادله الحقیقی دارای جواب $\lambda \in L^2(\Omega; Z_{ref}^*)$ است. اکنون از عبارت اول (15) داریم:

$$u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) = u'(\tau)^* (E_u(u(\tau), \tau)^* \lambda) = E_\tau(u(\tau), \tau)^* \lambda.$$

در نتیجه برای محاسبه مشتقهای کاهش یافته به رابطه ساده زیر خواهیم رسید:

$$j'(\tau) = E_\tau(u(\tau), \tau)^* \lambda + J_\tau(u(\tau), \tau).$$

در مسایل بهینه‌سازی شکل، $(\tau)' j'$ را مشتق شکل می‌نامیم. الگوریتم محاسبه مشتق شکل در زیر خلاصه شده است:

الگوریتم محاسبه گرادیان مرتبه اول

۱. فرض کنید $\tau \in T_{ad}$ داده شده باشد، متغیر حالت $(\tau, u) \in L^2(\Omega; X_{ref})$ با حل معادله حالت به دست می‌آید:

$$\langle E(u(\tau), \tau), v \rangle_{L^2(\Omega; Z_{ref})} = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega; Z_{ref}^*).$$

۲. متغیر الحاقی متناظر $\lambda \in L^2(\Omega; Z_{ref}^*)$ را با حل معادله الحاقی زیر به دست آورید:

$$\langle \lambda, E_u(u(\tau), \tau)v \rangle_{L^2(\Omega; Z_{ref})} = -\langle J_u(u(\tau), \tau), v \rangle_{L^2(\Omega; X_{ref}^*)}, \quad \forall v \in L^2(\Omega; X_{ref}^*),$$

۳. مشتق کاهش یافته $(\tau)'$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\langle j'(\tau), \delta\tau \rangle_S = \langle \lambda, E_\tau(u(\tau), \tau)\delta\tau \rangle_{L^2(\Omega; Z_{ref})} + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S \quad \forall \delta\tau \in S^*.$$

۴ گسسته سازی تصادفی

۴-۱ فرض نویز متناهی

متغیر تصادفی $y_k : \Omega \rightarrow \Gamma_k \subset \mathbb{R}$ را برای $k = 1, 2, \dots, M$ با $M < +\infty$ مقدار در نظر می‌گیریم که

دارای تابع چگالی احتمال $\rho(y) = \prod_{k=1}^M \rho_k(y_k)$ را چگالی توأم

$y \in \Gamma \equiv \prod_{k=1}^M \Gamma_k \subset \mathbb{R}^M$ تعریف می‌کنیم، همچنین می‌دانیم $y = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$ برداری با بعد متناهی

است. در حل معادلات با مشتقات جزیی با روش‌های عددی، فرض متناهی بودن پارامترهای تصادفی بسیار حیاتی است. در این پژوهش این فرض را در نظر گرفته و برای سادگی نمایش روابط، از نماد گذاری فضاهای متناهی استفاده می‌کنیم. با این فرض تابع منبع تصادفی f به تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی وابسته خواهد بود. به طور نمادین می‌توانیم بنویسیم $f(y(\omega), x) = f(y_1(\omega), \dots, y_M(\omega); x)$ که در آن $y(\omega) = [y_1(\omega), \dots, y_M(\omega)]^T$ یک بردار تصادفی است. فرض می‌کنیم که y_k برای $k = 1, \dots, M$ دارای میانگین صفر و واریانس واحد هستند و همچنین دو به دو از هم مستقل‌اند. با فرض وابستگی خطی f به y ، خواهیم داشت:

$$f(y, x) = \mathbb{E}[f](x) + \sum_{k=1}^M f_k(x)y_k(\omega),$$

که در آن f_k برای $k = 1, \dots, M$ به طور یکنواخت کراندار هستند. این گسترش همان توسعی کارهون-لویو است. در این مقاله برای این گسترش‌ها توسعی کارهون-لویو را به کار بسته‌ایم. این فرمول‌بندی برای انتگرال‌گیری بسیار مفیدتر خواهد بود. ابتدا برای فرمول‌بندی در فضای متناهی، با استفاده از قضیه دووب-دینکین^۱ داریم [۳۲]:

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{D}} f(\omega, x) dx \mu(d\omega) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} f(y, x) dx \rho(y) dy.$$

^۱ Doob-Dynkin

این فرمول بندی را برای استفاده از روش‌های عددی در ادامه به کار خواهیم بست. نحوه محاسبه توسعی کارهونن-لویو در [۳۳] مطالعه شد.

۴-۲ روش نمونه‌گیری مونت کارلو

روش نمونه‌گیری مونت کارلو بر اساس ایجاد سیستمی از متغیرهای تصادفی Y است که مستقل و با توزیع یکسان می‌باشد؛ بنابراین حل سیستم (۹) به صورت حل M سیستم معین، برای M حقیقی سازی متفاوت از Y است و بنابراین M جواب $(\tau; y^j) = u(y^j)$ را به دست خواهیم آورد که y^j ، i -امین حقیقی سازی Y است. زمانی که M جواب محاسبه شد با استفاده از آن‌ها می‌توان آماره‌های مورد نیاز را تخمین زد. برای مثال می‌توان میانگین را با استفاده از قضیه لم مرکزی به صورت $(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u^i$ تخمین زد. نرخ همگرایی این روش نسبتاً کند و برابر است با $O(M^{-\frac{1}{2}})$. [۲۸]

۴-۳ روش‌های هم محلی تصادفی

روش هم محلی تصادفی، در حالت کلی بر اساس توسعی چندجمله‌ای و به‌ویژه، درونیاب لاغرانژ است. ایده کلی، انتخاب مجموعه نقاط هم محلی $\{y^j\}_{j=1}^M$ در فضای تصادفی است. بر این اساس معادله (۹) در هریک از نقاط y^j باید برقرار باشد، به این معنی که سیستم زیر برای $M = 1, 2, \dots, j$ حل می‌شود:

$$E(u(y^j; \tau), \tau) = 0, \quad (17)$$

برای هر j ، (۱۷) یک سیستم معین است و درنتیجه روش هم محلی شامل حل M سیستم معین خواهد بود. البته این یک تعریف گسترده برای روش هم محلی است که روش نمونه‌گیری مونت کارلو را نیز شامل می‌شود. عموماً زمانی که روش‌های هم محلی به کار می‌رود، انتخاب هوشمندانه نقاط هم محلی انجام می‌گیرد. جواب معادله با مشتقات موردنظر را می‌توان با استفاده از توابع درونیاب لاغرانژ نمایش داد. اکنون جواب معادله حالت (۱۷) با استفاده از درونیابی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{u}(y) \equiv \mathcal{I}(u) = \sum_{j=1}^M u(y^j) h_j(y) v, \quad (17)$$

که در آن h_j چندجمله‌ای‌های لاغرانژ است و $u(y^j; \tau) = u(y^j)$. یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های لاغرانژ در فضای درونیابی مناسب، تعریف می‌شود و برای هر $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ داریم $h_i(y^j) = \delta_{i,j}$. درنتیجه درونیابی $\tilde{u}(y)$ برابر جواب دقیق در هر M نقطه هم محلی است. با استفاده از جواب‌های معین در نقاط هم محلی، آماره‌های درونیابی را می‌توان محاسبه کرد و بنابراین می‌توان آماره‌های جواب تصادفی (۱۷) را به دست آورد. میانگین درونیابی برای مثال می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \int_{\Gamma} h_j(y) \rho(y) dy. \quad (18)$$

محاسبه امید ریاضی می‌تواند به صورت غیر بدیهی به دست آید که برای این کار اطلاعات چندجمله‌ای‌های لاغرانژ مورد نیاز است. یک روش استفاده از ماتریس وارون از نوع واندرموند، است که به محاسبات زیادی نیاز دارد. روش دیگر استفاده از قاعده انتگرال‌گیری^۱ برای به دست آوردن انتگرال است که به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \sum_{k=1}^M h_j(y_k) \rho(y_k) w_k,$$

که در آن y_k نقاط و w_k وزن‌های انتگرال‌گیری هستند. تقریب انتگرال در (۱۸) دقیق خواهد بود؛ زیرا چندجمله‌ای لاغرانژ از مرتبه M هستند و انتگرال‌گیری درجه دوم برای چندجمله‌ای‌هایی از این مرتبه دقیق است. رابطه به دست آمده برای میانگین درونیابی را می‌توان با انتخاب هوشمندانه نقاط هم محلی، ساده‌تر کرد. با تابع مشخصه چندجمله‌ای‌های لاغرانژ برای $\{1, 2, \dots, M\}$ ، $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$ که برابر $h_i(y^j) = \delta_{i,j}$ است و بازنویسی روابط، میانگین به رابطه زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \rho(y^j) w_j,$$

به همین ترتیب واریانس درونیابی می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{u}] &= \sum_{k=1}^M \left(\sum_{j=1}^M u(y^j) \delta_{i,j}(y_k) - \mathbb{E}[\tilde{u}] \right)^2 \rho(y_k) w_k \\ &= \sum_{k=1}^M (u(y_k) - \mathbb{E}[\tilde{u}])^2 \rho(y_k) w_k \end{aligned}$$

۵ بھینه‌سازی هندسی با قید معادله با مشتقات جزئی بیضوی تصادفی

روش ارایه شده در بخش‌های قبلی را برای حل مساله بھینه‌سازی

$$J(\mathcal{D}) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u(\mathcal{D})) dx dy. \quad (19)$$

و قید معادله با مشتقات جزئی زیر به کار می‌گیریم:

$$-\Delta u(y; x) + bu(y; x) = f(y; x), \quad \text{in } \Gamma \times \mathcal{D}, \quad (20)$$

با توجه به این که استخراج معادله حالت و الحاقی نیازی به انتقال دامنه ندارد، ابتدا آن‌ها را با معرفی لاغرانژین برای مساله بالا به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{D}, u(y; \mathcal{D}), p(y; \mathcal{D})) &= \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u(\mathcal{D})) dx dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} p(y; \mathcal{D})(-\Delta u(y; x) + bu(y; x) - f(y; x)) dx dy. \end{aligned}$$

¹ Quadrature Rule

به راحتی می‌توان دید که انتقال این انتگرال‌ها به دامنه ثابت با استفاده از تبدیل‌های $T_{ad} \in \tau$ و رابطه (۱۰) انجام می‌پذیرد. همچنین توجه کنید که در اینجا برای سادگی، از فرمول بندی بر اساس دامنه استفاده می‌کنیم (توجه کنید که $(\mathcal{D}_{ref} + I)(\tau + I) = \mathcal{D}$) برای مساله بهینه‌سازی ساختار، غالباً متناظر قید معادله با مشتق‌ات جزئی، با دو نوع شرایط مرزی سروکار داریم: شرط مرزی دیریکله و شرط مرزی نیومن که به طور جداگانه به بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

۱-۵ شرط مرزی نیومن

فرض کنیم u جواب سیستم (۲۰) با شرط مرزی نیومن زیر باشد:

$$\nabla u \cdot n = g_N(y, x), \quad \text{on } \Gamma \times \partial \mathcal{D}_N \quad (21)$$

با تشکیل لاگرانژین برای مساله (۲۰) با شرط مرزی (۲۱) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}, u, p) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u) dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f dx dy - \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}} p g_N dx dy,$$

که در آن u و p به فضای بختر $L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$ تعلق دارند و $\{2, 3\} \subset d$. باید توجه داشت که فضای $H^1(\mathbb{R}^d)$ به دامنه \mathcal{D} وابسته نیست و درنتیجه متغیرهای تابعک لاگرانژین از یکدیگر مستقل هستند. با محاسبه مشتق‌های جهتی لاگرانژین می‌توانیم سیستم بهینگی مساله کنترل بهینه به دست آمده را تشکیل دهیم. ابتدا مشتق جزئی \mathcal{L} نسبت به p و درجهت δp برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{D}, u, p)(\delta p) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} \nabla \delta p \cdot \nabla u + b \delta p u - \delta p f dx dy - \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}} \delta p g_N dx dy, \quad (22)$$

که وقتی صفر می‌شود در واقع فرم تغییری معادله حالت را به دست می‌دهد. اکنون مشتق جزئی \mathcal{L} نسبت به u و درجهت $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$ برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{D}, u, p)(\delta u) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j'(u) \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} \nabla p \nabla \delta u + b p \delta u dx dy, \quad (23)$$

که وقتی صفر می‌شود فرم تغییری معادله الحاقی را به دست می‌دهد. اکنون برای محاسبه مشتق شکل باید مشتق جزئی \mathcal{L} را نسبت به دامنه \mathcal{D} با فرض این که متغیرهای u و p ثابت هستند درجهت τ محاسبه کنیم:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, u, p)(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}_{ref}} \tau \cdot n (j(u) + \nabla p \nabla u + b p u - p f + \frac{\partial(p g_N)}{\partial n} + H p g_N) ds dy, \quad (24)$$

که در آن H خمیدگی میانگین است. اکنون باید توجه داشت که با متغیر حالت $(\mathcal{D}_{ref}) u$ و الحاقی p دقیقاً به گرادیان تابع هدف (مشتق شکل) دست خواهیم یافت:

$$J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{ref}, u(\mathcal{D}_{ref}), p)(\tau) + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{D}_{ref}} \mathcal{L}_{uu}(\mathcal{D}_{ref}, u(\mathcal{D}_{ref}), p) u'(\mathcal{D}_{ref}) \tau ds dy,$$

در اینجا u به دامنه \mathcal{D} وابسته و از متغیر الحاقی، p مستقل است. توجه کنید که از قضیه مشتق ترکیبی برای مشتق شکل استفاده کردیم. با قرار دادن $p(\mathcal{D}_{ref})$ که جواب معادله الحاقی است، عبارت دوم حذف می‌شود و درنتیجه خواهیم داشت:

$$J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{ref}, u(\mathcal{D}_{ref}), p(\mathcal{D}_{ref}))(\tau). \quad (25)$$

که مشتق پذیری تابع هدف نسبت به دامنه را برای محاسبه مشتق ترکیبی نیاز داریم.

۲-۵ شرط مرزی دیریکله

اکنون سیستم (۲۰) را با شرط مرزی دیریکله زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = g_D(\omega, x), \quad \text{in } \Omega \times \partial\mathcal{D}. \quad (26)$$

با توجه به این که شرط مرزی دیریکله تغییری نیست درنتیجه وارد کردن آن در فضای تابعی و به دست آوردن تابعک لاغرانژین پیچیده خواهد بود. یک راه حل جایگزین برای حل این مشکل، استفاده از ضریب لاغرانژ مکمل است. به عبارت دیگر برای λ لاغرانژین $(u, p, \lambda) \in \left(L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))\right)^3$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}, u, p, \lambda) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u) dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial\mathcal{D}} \lambda(u - g_D) ds dy.$$

در رابطه بالا متغیرها از یکدیگر مستقل هستند؛ زیرا متغیرهای (λ, u, p) به فضایی تعلق دارند که به دامنه وابسته نیست. همچنین مشتق جزیی لاغرانژین \mathcal{L} نسبت به متغیرهای p و λ (u با توجه به تعریف) به ترتیب به فرم تغییری معادله‌های حالت و شرط مرزی دیریکله می‌انجامد. برای به دست آوردن فرم تغییری معادله الحاقی، مشتق جزیی لاغرانژین را نسبت به u و در جهت $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$ محاسبه می‌کنیم:

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{D}, u, p, \lambda)(\delta u) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j'(u) \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} p \Delta \delta u + b p \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial\mathcal{D}} \lambda \delta u ds dy. \quad (27)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزیی مجددآ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(\mathcal{D}, u, p, \lambda)(\delta u) &= \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} (j'(u) - \Delta p + b p) \delta u dx dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \int_{\partial\mathcal{D}} (\nabla p \cdot n + \lambda) \delta u ds dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial\mathcal{D}} p \nabla \delta u \cdot n ds dy, \end{aligned}$$

حال شرط $\delta u = 0$ برای همه $\mathcal{L}_u(\mathcal{D}, u, p, \lambda)(\delta u) \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$ به سه رابطه خواهد انجامید. ابتدا را با محمل فشرده در $\Omega \times \mathcal{D}_{ref}$ نظر می‌گیریم. درنتیجه خواهیم داشت:

$$-\Delta p + b p = -j'(u), \quad \Omega \times \mathcal{D}_{ref},$$

اکنون با صفر گرفتن δu روی $\Omega \times \partial\mathcal{D}_{ref}$ و با مقدار دلخواه برای $\nabla \delta u \cdot n$ در فضای $L^2(\Omega; L^2(\partial\mathcal{D}_{ref}))$ روی $\Omega \times \partial\mathcal{D}_{ref}$ خواهیم داشت: $p = 0$. سرانجام با دلخواه گرفتن δu در فضای $L^2(\Omega; H^1(\mathcal{D}_{ref}))$ روی $\Omega \times \partial\mathcal{D}_{ref}$ خواهیم داشت: $\nabla p \cdot n + \lambda = 0$ ، به این ترتیب دوباره به رابطه الحاقی خواهیم رسید. اکنون برای محاسبه مشتق شکل باید مشتق جزیی \mathcal{L} را نسبت به \mathcal{D} و در جهت τ به دست آوریم. با در نظر گرفتن جوابهای u ، p و ضریب لاغرانژ λ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, u, p)(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial\mathcal{D}_{ref}} \tau n(j(u) + \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f + \frac{\partial(\lambda(u - g_D))}{\partial n} + H \lambda(u - g_D)) ds dy.$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی $\lambda = -\nabla p \cdot n$ و $u = g_D$ ، $p = 0$ و همچنین $\Omega \times \partial\mathcal{D}_{ref}$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{ref}, u, p)(\tau) = J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau) + \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}_{ref}} \mathcal{L}_u(\mathcal{D}_{ref}, u(\mathcal{D}_{ref}), p) u'(\mathcal{D}_{ref}) \tau ds dy.$$

یادآوری می‌کنیم که برای به دست آوردن این رابطه، با توجه به استقلال متغیرهای p و ضریب لاگرانژ λ از دامنه D با استفاده از قضیه مشتق ترکیبی به دست آمد. اکنون با جایگذاری مقادیر $(D_{ref}) = p$ و $\lambda = \nabla p(D_{ref}).n$ که در آن جواب معادله الحاقی است، عبارت دوم حذف می‌شود و درنتیجه مشتق شکل موردنظر به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}_D(D_{ref}, u, p)(\tau) = J'(D_{ref})(\tau). \quad (28)$$

۳-۵ الگوریتم بهینه‌سازی عددی

در این بخش، الگوریتم گرادیان را برای بهینه‌سازی شکل موردنظر، به کار می‌بریم. برای کمینه‌سازی عددی تابع هدف $J(D) = \int_{\Gamma} \int_D j(u(D)) dx dy$ ، با قیود به دست آمده در سیستم بهینگی در نظر گرفته می‌شود. فرمول تحلیلی گرادیان تابع هدف نسبت به τ که شکل موردنظر $(D = \tau(D_{ref})) = (I + \tau)(D_{ref})$ را پارامتری می‌کند به صورت زیر خواهد بود:

$$J'(D_{ref})(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial D_{ref}} \tau \cdot n \cdot j(D_{ref}) dx dy,$$

که در آن j تابعی از متغیر حالت u و الحاقی p نیز است. درنتیجه می‌توانیم شکل جدید را با شروع از شکل اول D_{ref} به صورت $(D_s = (I + \tau_s)(D_{ref}))$ محاسبه کنیم که در آن s گام کاهشی است. برای s به اندازه کافی کوچک، می‌توان اطمینان داشت که $J(D_s) \leq J(D_{ref})$. توجه داریم که برای به دست آوردن شکل جدید D_s دو مساله وجود دارد: نخست آنکه بردار $\tau_s \in T_{ad}$ باید در هر گام محاسبه شود در حالی که n پیش‌تر روی مرز ∂D_{ref} تعریف شده است؛ بنابراین اثر موردنظر باید به درون D_{ref} گسترش یابد تا بتوانیم τ_s را محاسبه کنیم. مساله دوم این است که با توجه به این که اغلب فرض می‌کنیم $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \in W^{1,\infty}$ و این که تابع j ممکن است به اندازه کافی منظم نباشد، باید پارامتر موردنظر را به اندازه کافی منظم کنیم [۱]. مطلب دیگری که برای پیاده‌سازی عددی باید به آن توجه داشت، اعمال قید محدودیت حجم در مسایل بهینه‌سازی شکل است که در رابطه (۲) با $V = \int_D dx$ مشخص شده و در آن V حجم اولیه است. برای اعمال این دسته از قیود از ضریب لاگرانژ λ استفاده می‌شود (با این ضریب می‌توان قید حجم را وارد تابع لاگرانژین کرد). با این توصیف و با در نظر گرفتن $D := D_{ref}$ به عنوان شکل آغازین، قسمت اصلی الگوریتم در هر گام برابر خواهد بود با:

- محاسبه پارامتر طراحی

$$\tau_k = \begin{cases} s.n_k \left(\frac{1}{r}(u - u_d)^r + (\nabla u \cdot \nabla p + b u p - f p) - l_k \right) & \text{on } \mathcal{S}, \\ . & \text{on } \partial D \setminus \mathcal{S}, \end{cases} \quad (29)$$

- به هنگام سازی شکل: $D_{k+1} = (I + \tau_k)(D_k)$

باید توجه داشت که مقدار پارامتر طراحی روی مرزهای ثابت برابر صفر است.

استراتژی که ما برای حل مساله کترل بهینه روی مرز ثابت به کاربردهایم بهینه‌سازی-سپس-گسته سازی نامیده می‌شود. حال سیستم بهینگی محاسبه شده است برای اعمال روش عددی، همان‌طور که در بخش ۴ توضیح داده شده است، از روش هم محلی تصادفی برای گسته سازی استفاده می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم که y^j برای $M = 1, 2, \dots, J$ نقاط هم محلی باشد، $k \in \mathbb{N}$ را با $k = ۰$ به عنوان گام آغازین، به عنوان شمارنده تکرارها در نظر می‌گیریم. τ را متناظر با نقطه شروع قرار می‌دهیم. اکنون الگوریتم بهینه‌سازی عددی به صورت زیر خلاصه می‌شود:

۱. حل معادلات حالت و الحاقی: برای هر نقطه هم محلی y^j سیستم معین متناظر معادله با مشتقات جزیی

تصادفی (۲۲) و (۲۳) و (۲۷) در حالت دیریکله را برای به دست آوردن $(u_k^j, p_k^j, \lambda_k^j)$ حل کنید.

۲. جستجوی جهت: با استفاده از $(u_k^j, p_k^j, \lambda_k^j)$ به دست آمده از گام (۱)، با استفاده از توسعی چندجمله‌ای (۱۸) و به کار بردن قاعده انتگرال‌گیری، مقدار $(\bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{\lambda}_k)$ را محاسبه کرده و با استفاده از آن و رابطه (۲۹)، پارامتر طراحی (جایه‌جایی شبکه) را به دست می‌آوریم.

۳. به هنگام سازی: قرار می‌دهیم، $D_{k+1} = (I + \tau_k)(D_k)$ و $k := k + ۱$

برای بیان بیشتر توضیحات زیر می‌تواند مفید واقع شود:

(الف) منظم سازی: باید توجه داشت که گرادیان تابع هدف از ضرب داخلی $\langle J'(D_{ref}), \tau \rangle$ استخراج می‌کنیم که در تعریف مشتق فرشت ظاهر می‌شود. ضرب داخلی دارای ساختار هیلبرت (برای مثال $H^1(D)$) است.

بنابراین جهت کاهشی $d \in H^1(D)$ را می‌توان به‌طور یکتا از رابطه زیر به دست آورد:

$$\int_D \nabla d \nabla \tau + d \tau dx = \langle J'(D_{ref}), \tau \rangle, \quad (30)$$

که علاوه بر این که منظم بودن دلخواه گرادیان به دست می‌آید، رابطه (۳۰) را می‌توان به گسترش طبیعی جایه‌جایی شبکه به همه دامنه تعبیر کرد [۱].

(ب) محدودیت حجم: مقدار ضریب لاگرانژین در هر تکرار به هنگام سازی می‌شود. با در نظر گرفتن مشتق شکل به صورت $l_{k+1} = J'(D) + IV'(D) = ۰$ لاغرانژین در هر گام با استفاده از رابطه زیر به هنگام می‌شود:

$$l_{k+1} = \frac{(l_k + l)}{2} + \varepsilon_l(V - V).$$

که در آن ε_l عدد مثبت به اندازه کافی کوچکی است. با توجه به این که پارامتر تغییر شبکه و حجم پارامترهای غیر تصادفی هستند، محاسبات مانند مساله‌های معین انجام می‌پذیرد.

(پ) محاسبه طول گام: محاسبه طول گام در این مسایل بسیار دشوار است و محاسبات را به‌اندازه قابل توجه افزایش می‌دهد. با توجه به دشواری‌های قبل توجهی که برای استفاده از روش‌های کارایی مانند آرمیزو و ولف وجود دارد در مقاله حاضر، طول گام را با محاسبه جهت‌های کاهشی قبلی به دست آورده‌ایم. به‌این‌ترتیب که ضرب داخلی $\langle d_k, d_{k-1} \rangle$ معیاری برای کاهش یا افزایش طول گام در نظر گرفته می‌شود. همچنین

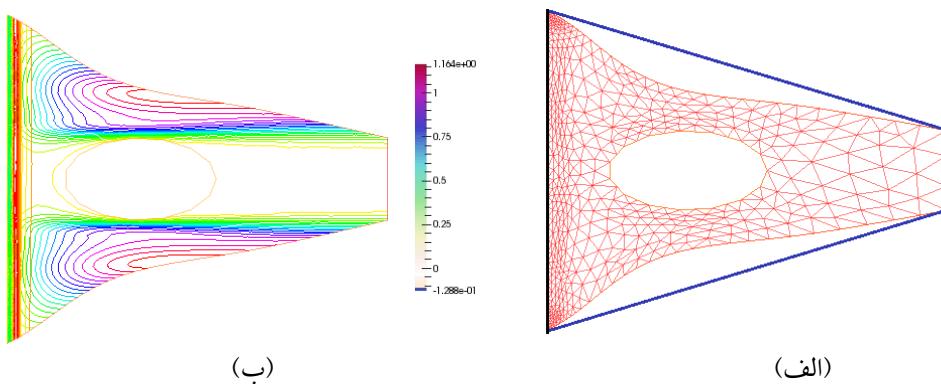
〈 d_k, d_{k-1}

۶ مثال عددی

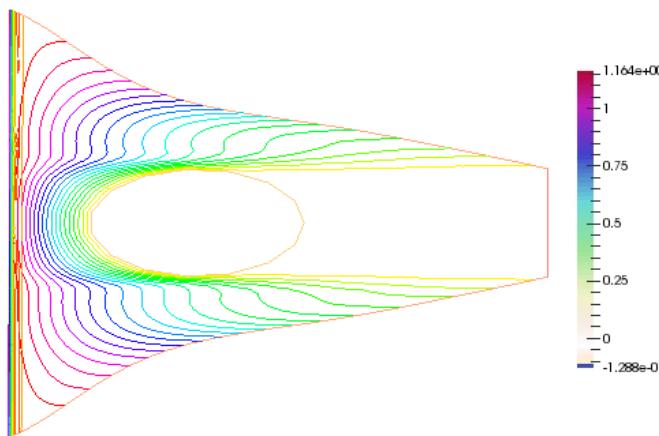
برای مطالعه مثال عددی، مساله آموزنده بهینه‌سازی شکل نازل را در نظر می‌گیریم.تابع هدف در رابطه (۱۹) برابر

$$J(\mathcal{D}, u) = \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} (u - u_d)^2 dx dy + \frac{\beta}{\zeta} \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}_N} g_N(y; x) u ds dy,$$

است و معادله حالت (۲۰)، با پارامترهای تصادفی، رفتار جریان در نازل را مدل‌سازی می‌کند. نازل شامل یک ورودی، یک خروجی و دیواره است. در این مساله حالت مساله تابع جریان u است و دیواره (مرز آزاد \mathcal{S}) پارامتر طراحی است. همچنین فرض کرده‌ایم که جریان غیر چرخشی و متقارن است. در مقاله حاضر مساله نازل همگرا در نظر گرفته شده و در آن به دنبال جریان یکنواخت u در سراسر نازل هستیم، در حالی که جریان خروجی نازل ناچیز باشد. شکل ایده‌آل نازل‌ها که در کاربردهای مهندسی استفاده می‌شود هموار است که البته در اینجا با انتخاب مرز لیشیتس همواری موردنظر به دست می‌آید. نازل اولیه در شکل ۱ نشان داده شده است. ورودی نازل با شرط مرزی دیریکله $(x_1 - 1)y_1, x_2 = g_D$ که یک میدان تصادفی است، مدل شده است. در اینجا y_1 دارای توزیع گاووسی با میانگین $2 = \bar{y}_1$ و واریانس $0.02 = Var[y_1]$ در بازه $[0, 2]$ است. جریان خروجی با شرط نیومون $y_2 \times 10^{-4} = g_N$ مدل شده که یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[-1, 1]$ با مقدار کوچک (اغتشاش) در نظر گرفته شده است. $(x_1 - 1)y_2 = b$ پارامتر تصادفی است که با توسعی کارهونن-لویو (بخش ۴) تقریب شده است. تابع منبع $f(x_1, y_2) = 10^{-2}$ که اثر دیواره نازل بر جریان را مدل کند، نیز میدان تصادفی در نظر گرفته شده که در آن y_2 دارای توزیع نرمال در بازه $[-1, 1]$ با میانگین و واریانس $0.2 = Var[y_2]$ است تا مدل مناسبی از اثر دیواره بر جریان، به دست دهد. در این مثال $\beta = 1$ در نظر گرفته شده است. شکل ۲، جواب بهینه به دست آمده را برای نازل (که همان شکل بهینه است) نشان می‌دهد، همچنین تابع تراز میانگین جریان نیز در آن نشان داده شده است. در شکل ۳ نازل بهینه به همراه میانگین متغیر الحاقی نشان داده شده است.



شکل ۱. (الف) شکل اولیه نازل (خطهای پر) و شکل نهایی نازل شبکه‌بندی شده است، (ب) شکل نهایی نازل که تراز میانگین متغیر الحاقی را نشان می‌دهد (سمت چپ ورودی نازل را نشان می‌دهد و سمت راست خروجی نازل است).



شکل ۲. تراز میانگین حالت نهایی متناظر با شکل بهینه (سمت چپ ورودی نازل و سمت راست خروجی نازل است)

نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهد که برای رسیدن به جریان دلخواه (u_d) در ناحیه اندازه‌گیری (که در اینجا همه دامنه نازل دو بعدی است) با جریان ورودی تصادفی و غیر چرخشی داده شده gD در حالی که جریان خروجی باید برابر با gN باشد باید شکل نازل (شکل ۱) تغییر آن باید به گونه‌ای باشد که انرژی کمینه شود (عبارت دوم در تابع هدف) و حالت به دست آمده تا آنجا که ممکن است به حالت دلخواه نزدیک شود. در این صورت همان‌طور که انتظار می‌رود شکل نازل جمع‌تر شده است. البته با توجه به اعمال قید حجم مجاز می‌توان دید که بررسی مساله دشوار است و تنها کم کردن حجم ما را به جواب بهینه نمی‌رساند. در اینجا ضریب عبارت دوم می‌تواند مانند پارامتر منظم ساز در نظر گرفته شود بسته به این که کمینه کردن تابع انرژی در دامنه چه اندازه حائز اهمیت باشد. این دسته از مسایل در مهندسی کاربرد فراوانی دارد که می‌توان به طراحی تونل باد با جریان یکنواخت در داخل تونل اشاره کرد (در این صورت ضریب انرژی را نادیده می‌گیریم) در حالی که جریان باد ورودی رفتار تصادفی نسبت به مکان دارد.

یکی از ویژگی‌های اساسی روش‌های غیر نفوذی، در کنار قابلیت بهبود با انتخاب هوشمندانه نقاط (مانند نقاط هم محلی در روش هم محلی)، قابلیت ترکیب آنها با روش‌های موجود برای حل دستگاه‌های معین است. این ویژگی به ما اجازه داده است تا از ابزارها و الگوریتم‌های کارایی در دسترس برای به دست آوردن نتایج عددی استفاده کنیم. برای مقاله حاضر، کدها در سیستم عامل لینوکس پیاده‌سازی شده و از بسته نرم‌افزاری FEniCS [۳۴] منطبق با Python استفاده شده است. میانبر اصلی FEniCS بسته محاسباتی DOLFIN [۳۵] است که ابزارهای مناسبی را برای حل معادلات با مشتقهای جزئی در اختیار قرار می‌دهد. برای حل مساله جابه‌جای شبکه از افزونه FEMorph که توسط دکتر اشمیت [۳۶] توسعه داده شده، استفاده شده است. شکل‌ها با استفاده از نرم‌افزار Paraview [۳۷] ایجاد شده است.

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله مساله بهینه‌سازی شکل هندسی با ورودی‌های تصادفی (که آن را بهینه‌سازی هندسی تصادفی نامیدیم) ارایه شده است. فرمول‌بندی ما بر اساس کارهای مورات و سیمون [۱۶] برای پارامتری کردن مساله پی‌ریزی شده و با استفاده از ابزارهای کنترل بهینه تصادفی که در سال‌های اخیر توسعه داده شده، به بررسی و حل آن‌ها پرداختیم. برای گستره سازی تصادفی از روش‌های غیر نفوذی مانند روش هم محلی تصادفی با استفاده از روش انتگرال‌گیری برای انتخاب شبکه، استفاده شده است و میدان‌های تصادفی را با استفاده از توسعی کارهونن-لویو تقریب زدیم. در ادامه روش ارایه شده را برای حل یک مساله آموزنده به کار بردیم تا کاربری روش نشان داده شود. باید توجه داشت که این روش برای حل این دسته از مسایل، در آغاز راه است و بنابراین مساله مشابهی برای مقایسه، در اختیار نبوده است؛ این نوع فرمول‌بندی برای استفاده در بهینه‌سازی، به خوبی انجام شده است اما هنوز برای بررسی کارایی روش‌های اعمال شده و همچنین بهبود کارایی آن‌ها باید مطالعات بیشتری صورت پذیرد.

منابع

[۲۲] مرادی، م.، صلاحی، م.، بردسیری، م.، جمالیان، ع.، (۱۳۹۳). یک مدل جدید استوار در طراحی شبکه زنجیره تأمین تحت عدم قطعیت. *مجله تحقیق در عملیات* در کاربردهای آن، ۲۶(۴۱)، ۹-۲۶.

- [1] Allaire, G., (2006). *Conception Optimale De Structures, Mathematiques And Applications*. Heidelberg: Springer.
- [2] Delfour, M.C., Zolésio, J.P., (2011). *Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, And Optimization*, 22, Siam.
- [3] Allaire, G., (2012). *Shape Optimization By The Homogenization Method*: Vol. 146, Springer Science & Business Media.
- [4] Lions, J.L., Lelong, P., (1968). *Contrôle Optimal De Systemes Gouvernés Par Des Équations Aux Dérivées Partielles*, 7, Paris: Dunod.
- [5] Pironneau, O., (1973). On Optimum Profiles In Stokes Flow. *Journal Of Fluid Mechanics*, 59(01): 117-128.
- [6] Sokolowski, J., Zolesio, J.P., (1992). *Introduction To Shape Optimization*, pp. 5-12. Berlin: Springer.
- [7] Céa, J., (1986). *Conception Optimale Ou Identification De Formes. Calcul Rapide De La Dérivée Directionnelle De La Fonction Coût, RAIRO-Modélisation Mathématique Et Analyse Numérique*, 20(3): 371-402.
- [8] Marrocco, A., Pironneau, O., (1978). Optimum Design With Lagrangian Finite Elements: Design Of An Electromagnet. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 15(3): 277-308.
- [9] Mohammadi, B., (2002). *Global Optimization By The Solution Of Over-Determined Boundary Value Problems*. Paris: Comptes Rendus De l'Académie Des Sciences.
- [10] Delfour, M., Zolezio, J.P., (2001). *Surface Derivatives*. SIAM Series.
- [11] Guillaume, P., Masmoudi, M., (1994). Computation Of High Order Derivatives In Optimal Shape Design. *Numerische Mathematik*, 67(2): 231-250.
- [12] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S., (2009). *Optimization With PDE Constraints*, Vol. 23. *Mathematical Modelling: Theory And Applications*.
- [13] Sethian, J. A., (2003). Level Set Methods And Fast Marching Methods. *Journal Of Computing And Information Technology*, 11(1): 1-2.
- [14] Allaire, G., Jouve, F., Toader, A.M., (2002). A Level-Set Method For Shape Optimization. *Comptes Rendus Mathematique*, 334(12): 1125-1130.
- [15] Murat, F., Simon, J., (1975). Etude Des Problèmes d'Optimum Design, Conf. IFIP, Lectures Notes In Computer Sciences, 41: 54-62.

- [16] Murat, F., Simon, J., (1974). Quelques Résultats Sur Le Contrôle Par Un Domaine Géométrique, 4, Laboratoire d'Analyse Numérique.
- [17] Micheletti, A. M., (1972). Metrica Per Famiglie Di Domini Limitati E Proprieta Generiche Degli Autovalori. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 26(3): 683-694.
- [18] Zolesio, J. P., (1979). Identification De Domaines Par Deformation. Dissertation. Universite De Nice.
- [19] Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A., Lemaire, M., (2004). Reliability-Based Topology Optimization. Structural And Multidisciplinary Optimization, 26(5): 295-307.
- [20] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2002). Robust Optimization Methodology And Applications. Mathematical Programming, 92(3): 453-480.
- [21] De Gournay, F., Allaire, G., Jouve, F., (2008). Shape And Topology Optimization Of The Robust Compliance Via The Level Set Method. ESAIM: Control, Optimisation And Calculus Of Variations, 14(1): 43-70.
- [23] Conti, S., Held, H., Pach, M., Rumpf, M., Schultz, R., (2009). Shape Optimization Under Uncertainty-A Stochastic Programming Perspective. SIAM Journal On Optimization, 19(4): 1610-1632.
- [24] Chen, S., Chen, W., Lee, S., (2010). Level Set Based Robust Shape And Topology Optimization Under Random Field Uncertainties. Structural And Multidisciplinary Optimization, 41(4): 507-524.
- [25] Kouri, D. P., (2012). An Approach For The Adaptive Solution Of Optimization Problems Governed By Partial Differential Equations With Uncertain Coefficients. Dissertation. Rice University.
- [26] Rosseel, E., Wells, G.N. (2012). Optimal Control With Stochastic PDE Constraints And Uncertain Controls. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 213: 152-167.
- [27] Keyanpou, M., Nehrani A.M., (2014). Optimal Thickness Of A Cylindrical Shell Subject To Stochastic Forces. Journal of Optimization Theory and Applications. In Publication. Doi.Org/10.1007/S10957-014-0663-Y
- [28] Xiu, D., (2010). Numerical Methods For Stochastic Computations: A Spectral Method Approach. Princeton University Press.
- [29] Kunoth, A., Schwab, C., (2013). Analytic Regularity And GPC Approximation For Control Problems Constrained By Linear Parametric Elliptic And Parabolic PDEs. SIAM Journal On Control And Optimization, 51(3): 2442-2471.
- [30] Bello, J. A., Fernández-Cara, E., Lemoine, J., Simon, J., (1997). The Differentiability Of The Drag With Respect To The Variations Of A Lipschitz Domain In A Navier-Stokes Flow. SIAM Journal On Control And Optimization, 35(2): 626-640.
- [31] Brandenburg, C., (2011). Adjoint-Based Adaptive Multilevel Shape Optimization Based On Goal-Oriented Error Estimators For The Instationary Navier-Stokes Equations. Verlag Dr. Hut.
- [32] Oksendal, B., (2003). Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer.
- [33] Loeve, M., (1946). Fonctions Aléatoires De Second Ordre. Revue Scientifique. 84:195-206.
- [34] FEniCS project website: <http://fenicsproject.org/>
- [35] DOLFIN is the C++/Python interface of FEniCS:
<http://bitbucket.org/fenics-project/dolfin>
- [36] FEMorph addon for Python: <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~schmidt/femorph.php>
- [37] ParaView official site: <http://www.paraview.org/>