مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال هشتم، شماره ۳ (پیاپی ۳۰)، پائیز ۹۰، ص ص ۱۲۴-۱۱۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

# تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس در DEA

**فرهاد حسین زاده لطفی[1]، زهرا قلیچ بیگی*[2]، کبری غلامی[3]، نازیلاآقایی[4]**
[1]دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، تهران، ایران
[2]*دانشگاه آزاد اسلامی واحد مبارکه، مبارکه، ایران
[3]دانشگاه آزاد اسلامی واحد بوشهر، بوشهر، ایران
[4]باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اردبیل، اردبیل، ایران

رسید مقاله: بیست و ششم اردیبهشت ماه ۱۳۹۰
پذیرش مقاله: چهاردهم شهریور ماه ۱۳۹۰

## چکیده

تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس در DEA بوسیله ی برنامه ریزی خطی مطالعه شده است. سیفورد و همکاران [۱] تحلیل حساسیت بازده به مقیاس را براساس دو شرط بررسی کردند. در این مقاله، تحلیل حساسیت در حالت کلی بحث می شود. برای این منظور، مدل هایی ارایه داده می شود که توسط آن مدل ها نوع بازده به مقیاس و ناحیه ی پایداری طبقه بندی بازده به مقیاس مشخص می شود. اثر تغییرات خروجی روی مدل $CCR$ ماهیت ورودی و اثر تغییرات ورودی روی مدل $CCR$ ماهیت خروجی در نظر گرفته می شود. در این مقاله، تنها تحلیل حساسیت $DMU$ هایی که نا کارای $CCR$ می باشند، در نظر گرفته می شود.

**کلمات کلیدی:** بازده به مقیاس، DEA، تحلیل حساسیت.

## ۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها با ارایه مدل CCR توسط چارنز و همکاران [۲] ابداع شد. سپس مدل CCR توسط بنکر و همکاران [۳] به مدل BCC گسترش یافت. هدف این دو مدل طبقه بندی واحدهای تصمیم گیرنده به دو طبقه کارا و ناکارا می باشد. یکی از موضوعات بسیار مهم در تحلیل پوششی داده ها مشخص کردن نوع بازده به مقیاس (RTS) می باشد. بنکر و همکاران [۴] با استفاده از دوال مدل BCC نوع بازده به مقیاس را مشخص کردند. سپس فار و همکاران [۵-۶] با استفاده از مقدار کارایی نوع بازده به مقیاس را مشخص کردند. مدل های ارایه شده فوق بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده را به سه دسته صعودی، نزولی و ثابت طبقه بندی می کنند. از آنجا که نوع بازده به مقیاس در تحلیل پوششی داده ها به صورت موضعی است. بنابراین تحقیق در مورد پایداری بازده به مقیاس یک موضوع بسیار مهمی است. سیفورد و همکاران [۱] تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس در تحلیل پوششی داده ها را با در نظر گرفتن دو شرط محاسبه می کند. ما در این مقاله بدون در نظر گرفتن این دو شرط ناحیه ی پایداری بازده به مقیای را محاسبه می کنیم.



*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: *zahra.ghlichbegi@yahoo.com*

ما چندین مدل برنامه ریزی خطی را برای محاسبه پایداری بازده به مقیاس واحدهای ناکارا ارایه می دهیم. طبقه بندی بازده به مقیاس بر اساس مدل CCR ماهیت ورودی و خروجی برای واحد تصمیم گیرنده ای، امکان دارد متفاوت باشد. برای این منظور تحلیل حساسیت بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR ماهیت ورودی و ماهیت خروجی محاسبه می کنیم.

بخش های این مقاله عبارتند از: بخش ۲ : مفاهیم اولیه. بخش ۳: تحلیل حساسیت بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR درماهیت ورودی. بخش ۴: تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR درماهیت خروجی. بخش ۵: مثال. بخش ۶: نتیجه گیری.

## ۱ مفاهیم اولیه

فرض کنیم $DMU_j$ $(j=1,\cdots,n)$ , $n$ واحد متجانس هستند که با به کار بردن بردار ورودی $x_j$ $(j=1,\cdots,n)$ بردار خروجی $y_j$ $(j=1,\cdots,n)$را تولید می نمایند و $x_j \in R^{m\geq \circ}$ $(j=1,\cdots,n)$و $y_j \in R^{s\geq \circ}$ $(j=1,\cdots,n)$.

مدل CCR در ماهیت ورودی توسط چارنز و همکاران [۲] به صورت زیر معرفی شد:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, && i=1,2,\ldots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, && r=1,2,\ldots,s, \\
& \lambda_j \geq 0, && j=1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۱}$$

توجه کنید که مدل (۱) همواره شدنی است و $0<\theta^* \leq 1$.

همچنین مدل CCR در ماهیت خروجی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \varphi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, && i=1,2,\ldots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{ro}, && r=1,2,\ldots,s, \\
& \lambda_j \geq 0, && j=1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۲}$$

بنکر و همکاران [۳] با استفاده از جواب های بهین مدل (۱) نوع بازده به مقیاس را به صورت زیرمشخص کردند:

$DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و فقط اگر حداقل در یکی از جواب های بهینه رابطه $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* = 1$ برقرار باشد. $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس صعودی است اگر و فقط اگر برای تمام جواب های بهینه رابطه $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* < 1$ برقرار باشد. $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس نزولی است اگر و فقط اگر برای تمام جواب های بهینه رابطه $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* > 1$ برقرار باشد.

## ۲ تحلیل حساسیت بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR در ماهیت ورودی

توجه داشته باشید که تحت مدل CCR در ماهیت ورودی اگر $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، آن گاه کاهش و افزایش خروجی ها نوع بازده به مقیاس ثابت راتغییر می دهد. اگر $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس صعودی باشد، کاهش خروجی ها نوع بازده به مقیاس صعودی را تغییر نمی دهد. به همین ترتیب اگر $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس نزولی باشد افزایش خروجی ها نوع بازده به مقیاس نزولی را تغییر نمی دهد تا هنگامی که $DMU_o$ به مرز $BCC$ برسد. بنابراین، ما فقط افزایش خروجی ها را برای $DMU$هایی که دارای بازده به مقیاس صعودی می باشند را در نظر می گیریم، کاهش خروجی ها را برای $DMU$ هایی که دارای بازده به مقیاس نزولی می باشند در نظر می گیریم و افزایش و کاهش خروجی ها را برای $DMU$هایی که دارای بازده به مقیاس ثابت می باشند را در نظر می گیریم. توجه کنید که تناسب افزایش خروجی با $\alpha \geq 1$ وتناسب کاهش خروجی با $\beta \leq 1$ برای $DMU_o$ممکن است. افزایش و کاهش خروجی ها به ترتیب توسط $\alpha$، $\beta$ به صورت $\alpha\, y_{ro}, \beta\, y_{ro} (r=1,\ldots,s)$ نمایش می دهیم. حا ل مقدار $\alpha,\beta$ را به نحوی محاسبه می کنیم که نوع بازده به مقیاس تغییرنکند. برای محاسبه کردن $\alpha,\beta$ ابتدا مجموعه های $E_o$، $E'_o$، $E''_o$، $T_o$، $T'_o$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$E_o$ = {$DMU$های کارای CCR}

$E'_o$ = {$DMU$های کارای CCR که دارای بازده به مقیاس چپ صعودی هستند}

$E''_o$ = {$DMU$های کارای BCC که دارای بازده به مقیاس صعودی هستند $\cup\, E'_o$}

$$T_o = \{(x,y): \sum_{j\in E_o}\lambda_j x_j \leq x \;, \sum_{j\in E_o}\lambda_j y_j \geq y \;, \sum_{j\in E_o}\lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j \in E_o\}$$

$$T'_o = \{(x,y): \sum_{j\in E''_o}\lambda_j x_j \leq x \;, \sum_{j\in E''_o}\lambda_j y_j \geq y \;, \sum_{j\in E''_o}\lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j \in E''_o\}$$

بر اساس این دو مجموعه می توانیم مقادیر زیر را تعریف کنیم:

$$\varphi_o^* = Max\{\varphi_o : (x_o, \varphi_o y_o) \in T_o\} \qquad (۳)$$

$$\phi_o^* = Max\{\phi_o : (x_o, \phi_o y_o) \in T'_o\} \qquad (۴)$$

**قضیه ۱.**

الف) $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و فقط اگر $\varphi_o^* = 1$ یا $\phi_o^* = 1$ یا $(\varphi_o^* > 1, \phi_o^* < 1)$.

ب) $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس نزولی است اگر و فقط اگر $\varphi_o^* < 1$.

ج) $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس صعودی است اگر و فقط اگر $\phi_o^* > 1$.

**برهان.** الف) (i) $(\Rightarrow)$ فرض $\varphi_o^* = 1$ [۱] مشاهده شود.

(ii) $(\Rightarrow)$ فرض $\phi_o^* = 1$ ابتدا متغیرهای جدید را معرفی می کنیم:

$$\hat{\phi}_o = \hat{\theta}\phi_o = 1 \Rightarrow \hat{\theta} = \phi_o^{-1} > 0$$
$$\hat{\lambda}_j = \hat{\theta}\lambda_j \qquad (j \in E_o'')$$

تمام محدودیت های (۴) را در $\hat{\theta}$ ضرب می کنیم و از این رو داریم:

$$\begin{aligned} Min \quad & \hat{\theta} \\ s.t. \quad & \sum_{j \in E_o''} \hat{\lambda}_j x_{ij} \le \hat{\theta} x_{io}, \quad i = 1,\ldots,m, \\ & \sum_{j \in E_o''} \hat{\lambda}_j y_{rj} \ge y_{ro}, \quad r = 1,\ldots,s, \\ & \sum_{j \in E_o''} \hat{\lambda}_j = \sum_{j \in E_o''} \lambda_j \phi_o^{-1} = \phi_o^{-1} = \hat{\theta}, \\ & \hat{\lambda}_j, \lambda_j \ge 0, \quad j \in E_o''. \end{aligned} \tag{۵}$$

$\phi_o^* = 1$. بنابراین $\sum_{j \in E_o} \hat{\lambda}_j^* = \hat{\theta}^* = 1$ یعنی در مدل CCR درماهیت ورودی داریم: $1 = \sum_{j \in E_o} \hat{\lambda}_j^*$ و $\hat{\theta}^* = 1$ و لذا $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است.

(iii) $(\Rightarrow)$ اگر $(\varphi_o^* > 1, \phi_o^* < 1)$ آن گاه $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است.

I) اگر $(\phi_o^* < 1)$ آن گاه $DMU_o' = (x_o, \phi_o^* y_o)$ را توسط (4) ارزیابی می کنیم و مقدار بهین آن برابر با ۱ می باشد. از (ii) به دست می آوریم $DMU_o' = (x_o, \phi_o^* y_o)$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. پس $DMU_o$ نمی تواند دارای بازده به مقیاس صعودی باشد (ما نمی توانیم مقدار خروجی ها راکاهش دهیم و باعث شود که $DMU$ ای که دارای بازده به مقیاس صعودی است به $DMU$ ای که دارای بازده به مقیاس ثابت است، تبدیل شود).

II) اگر $(\varphi_o^* > 1)$ آن گاه $DMU_o' = (x_o, \varphi_o^* y_o)$ را توسط (3) ارزیابی می کنیم و مقدار بهین آن برابر با ۱ می باشد. از (i) به دست می آوریم $DMU_o' = (x_o, \varphi_o^* y_o)$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. پس $DMU_o$ نمی تواند دارای بازده به مقیاس نزولی باشد (ما نمی توانیم مقدار خروجی ها را افزایش دهیم و باعث

شود که $DMU$ای که دارای بازده به مقیاس نزولی است به $DMU$ای که دارای بازده به مقیاس ثابت است، تبدیل شود).

بنابراین از (I) و (II) به دست می آوریم، $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است.

الف ($\Leftarrow$). [۱] مشاهده شود.

ب ($\Rightarrow$). فرض $\varphi_o^* < 1$ آن گاه اگر $DMU'_o = (x_o, \varphi_o^* y_o)$ را توسط مدل CCR در ماهیت ورودی ارزیابی کنیم مقدار بهین آن برابر با ۱ است.

بنابراین طبق قسمت (الف) $DMU'_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. پس $DMU_o$ نمی تواند دارای بازده به مقیاس صعودی باشد (ما نمی توانیم مقدار خروجی ها را کاهش دهیم و باعث شود که $DMU$ای که دارای بازده به مقیاس صعودی است به $DMU$ای که دارای بازده به مقیاس ثابت است، تبدیل شود). هم چنین $DMU_o$ نمی تواند دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، زیرا از (الف) داریم $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت نیست اگر وفقط اگر $\varphi_o^* \neq 1$ و $\phi_o^* \neq 1$ و( $(\phi_o^* > 1)$ یا $(1 > \varphi_o^*)$). $\varphi_o^* < 1$ بنابراین $\varphi_o^* \neq 1$ می دانیم که $\phi_o^* \le \varphi_o^* < 1$ بنابراین $\phi_o^* \neq 1$ پس $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت نیست. بنابراین $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس نزولی است.

ب($\Leftarrow$). [۱] مشاهده شود.

ج($\Rightarrow$). فرض $\phi_o^* > 1$ آن گاه اگر $DMU'_o = (x_o, \phi_o^* y_o)$ را توسط مدل CCR در ماهیت ورودی ارزیابی کنیم مقدار بهین آن برابر با ۱ است.

بنابراین طبق قسمت (الف) $DMU'_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. پس $DMU_o$ نمی تواند دارای بازده به مقیاس نزولی باشد (ما نمی توانیم مقدار خروجی ها را کاهش دهیم و باعث شود که $DMU$ای که دارای بازده به مقیاس نزولی است به $DMU$ای که دارای بازده به مقیاس ثابت است، تبدیل شود). هم چنین $DMU_o$ نمی تواند دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، زیرا از (الف) داریم $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت نیست اگر و فقط اگر $\varphi_o^* \neq 1$ و $\phi_o^* \neq 1$ و( $(\phi_o^* > 1)$ یا $(1 > \varphi_o^*)$). $\phi_o^* > 1$ بنابراین $\phi_o^* \neq 1$. می دانیم که $1 < \phi_o^* \le \varphi_o^*$. بنابراین $\varphi_o^* \neq 1$، پس $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت نیست. بنابراین $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس صعودی است.

برهان ج ($\Leftarrow$). برهان خلف، $\phi_o^* > 1$ نباشد، بنابراین $\phi_o^* = 1$ یا $\phi_o^* < 1$. اگر $\phi_o^* = 1$ آن گاه از (الف) نتیجه می شود که $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است که این تناقض است. اگر $\phi_o^* < 1$ آن گاه متغیرهای جدید را معرفی می کنیم:

$$\hat{\phi}_o = \hat{\theta}\phi_o = 1 \Rightarrow \hat{\theta} = \phi_o^{-1} > 0$$

$$\hat{\lambda}_j = \hat{\theta}\lambda_j \qquad (j \in E''_o)$$

اگر تمام محدودیت های (۴) را در $\hat{\theta}$ ضرب کنیم آن گاه داریم:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \hat{\theta} \\
s.t. \quad & \sum_{j\in E_o''} \hat{\lambda}_j x_{ij} \le \hat{\theta}\, x_{io}, \qquad i=1,\dots,m, \\
& \sum_{j\in E_o''} \hat{\lambda}_j y_{rj} \ge y_{ro}, \qquad r=1,\dots,s, \\
& \sum_{j\in E_o''} \hat{\lambda}_j = \sum_{j\in E_o''} \lambda_j \phi_o^{-1} = \phi_o^{-1} > 1, \\
& \hat{\lambda}_j, \lambda_j \ge 0, \qquad j \in E_o''.
\end{aligned}
$$

از این که $\varphi_o^* > 1$، نتیجه می شود $\sum_{j\in E_o} \hat{\lambda}_j > 1$. یعنی در مدل CCR در ماهیت ورودی داریم: $\sum_{j\in E_o} \lambda_j^* > 1$ و $\hat{\theta}^* = 1$ است و این تناقض با صعودی بودن بازده به مقیاس است.

**قضیه ۲.** فرض کنید $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس نزولی است. اگر خروجی ها به $\hat{y}_{ro} = \beta\, y_{ro}$ تبدیل شوند که $\varphi_o^* < \beta \le 1$، آن گاه $DMU'_O = (x_o, \hat{y}_o)$ دارای بازده به مقیاس نزولی است. ( $\beta$ضریب کاهش خروجی هاست)

**برهان.** [۱] مشاهده شود.

**قضیه ۳.** فرض کنید $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس صعودی است. اگر خروجی ها به $\hat{y}_{ro} = \alpha\, y_{ro}$ تبدیل شوند که $1 \le \alpha < \phi_o^*$، آن گاه $DMU'_o = (x_o, \hat{y}_o)$ دارای بازده به مقیاس صعودی است.( $\alpha$ضریب افزایش خروجی هاست).

**برهان.** برهان خلف، اگر $DMU'_o$ بازده به مقیاس صعودی نداشته باشد، بنابراین در ارزیابی $DMU'_o$ با مدل (4) به دست می آوریم، $\hat{\phi}_o^* \le 1$. از این رو داریم:

$$
\begin{aligned}
\phi_o^* = Max \quad & \hat{\phi}_o \\
s.t. \quad & \sum_{j\in E_o''} \lambda_j x_{ij} \le x_{io}, \qquad i=1,\dots,m, \\
& \sum_{j\in E_o''} \lambda_j y_{rj} \ge \hat{\phi}_o \hat{\alpha}\; y_{ro}, \quad r=1,\dots,s, \\
& \sum_{j\in E_o''} \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \ge 0, \qquad j \in E_o''.
\end{aligned}
$$

که $\hat{\phi}_o^* = \dfrac{\phi_o^*}{\alpha}$ که $\phi^*$جواب بهین مدل (۴) در ارزیابی $DMU_o$ می باشد.

حال اگر $\hat{\phi}_o^{\ *} \leq 1$ داریم:

$$\hat{\phi}_o^{\ *} = \frac{\phi_o^{\ *}}{\alpha} = 1 \Rightarrow \phi_o^{\ *} = \alpha$$

$$\hat{\phi}_o^{\ *} = \frac{\phi_o^{\ *}}{\alpha} < 1 \Rightarrow \phi_o^{\ *} < \alpha$$

در نتیجه:

$$\phi_o^* \leq \alpha$$

و این تناقض است با $1 \leq \alpha < \phi_o^*$.

**قضیه ٤.** فرض کنید $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. اگر خروجی ها به $\hat{y}_{ro} = \beta\, y_{ro}$ تبدیل شوند که $\phi_o^{\ *} \leq \chi < \varphi_o^*$، آن گاه $DMU'_o = (x_o, \hat{y}_o)$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. ($\chi$ ضریب تغییرات خروجی هاست)

**برهان.** برهان خلف، اگر $DMU'_o$ بازده به مقیاس ثابت نداشته باشد بنابراین دارای بازده به مقیاس نزولی و یا صعودی است. اگر دارای بازده به مقیاس نزولی باشد [۱] مشاهده شود.

حال اگر دارای بازده به مقیاس صعودی باشد، بنابراین در ارزیابی $DMU'_o$ با مدل (۴) به دست می آوریم: $\hat{\phi}^* > 1$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_o^* = Max \quad & \hat{\phi}_o \\
s.t \quad & \sum_{j \in E''_o} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{j \in E''_o} \lambda_j y_{rj} \geq \hat{\phi}_o \hat{\chi}\ y_{ro}, \quad r = 1,\dots,s, \\
& \sum_{j \in E''_o} \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \geq 0, \qquad j \in E''_o.
\end{aligned}$$

که $\hat{\phi}_o^{\ *} = \dfrac{\phi_o^{\ *}}{\chi}$ که $\phi_o^{\ *}$ جواب بهین مدل (4) در ارزیابی $DMU_o$ می باشد. حال اگر $\hat{\phi}_o^{\ *} > 1$، آن گاه $\phi_o^{\ *} = \dfrac{\phi_o^{\ *}}{\chi} > 1$ و لذا $\phi_o^{\ *} > \chi$ و این تناقض است.

## ٤ تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR درماهیت خروجی

اکنون آشفتگی ورودی به جای تغییرات خروجی $DMU_o$ در نظر گرفته می شود. توجه کنید تحت مدل CCR ماهیت خروجی، اگر $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، آن گاه کاهش و افزایش ورودی ها بازده به مقیاس ثابت را تغییر می دهد. اگر $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس نزولی باشد آن گاه افزایش ورودی ها بازده به مقیاس نزولی را تغییر نمی دهد. به همین ترتیب، اگر $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس صعودی باشد آن گاه کاهش ورودی ها بازده به مقیاس صعودی را تغییر نمی دهد تا هنگامی که $DMU_o$ به مرز CCR برسد. بنابراین فقط افزایش و کاهش ورودی ها را برای $DMU$ های به ترتیب دارای بازده به مقیاس صعودی و نزولی را در نظر

می گیریم و افزایش و کاهش ورودی ها را برای $DMU$هایی که دارای بازده به مقیاس ثابت می باشند را در نظر می گیریم. توجه کنید که تناسب افزایش ورودی با $\eta \geq 1$ و تناسب کاهش ورودی با $\varepsilon \leq 1$ برای $DMU_o$ممکن است. افزایش و کاهش ورودی ها را به ترتیب توسط $\varepsilon,\eta$به صورت $\varepsilon y_{ro},\eta\, y_{ro}$ $(r=1,\ldots,s)$ نمایش می دهیم. حا ل مقدار $\varepsilon,\eta$را به نحوی محاسبه می کنیم که نوع بازده به مقیاس تغییر نکند. در رابطه با محاسبه $\varepsilon,\eta$ ابتدا مجموعه های $F_o$، $F'_o$، $T'''_O$، $\psi_O$و $\zeta_o$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$F_o$ ={ $DMU$های کارای CCR که دارای بازده به مقیاس راست نزولی هستند}

$F'_o$ ={ $F_o \cup$ $DMU$های کارای BCC که دارای بازده به مقیاس نزولی هستند }

$$T'''_O=\{(x,y):\sum_{j\in F'_o}\lambda_j x_j \geq x\ ,\sum_{j\in F'_o}\lambda_j y_j = y\quad ,\sum_{j\in F'_o}\lambda_j = 1\quad ,\lambda_j \geq 0, j\in F'_o\}$$

$$\psi_o^* = Max\,\{\psi_o : (\psi_o x_o , y_o)\in T''_o\} \tag{۶}$$

$$\zeta_o^* = Min\{\zeta_o : (\zeta_o x_o , y_o)\in T_o\} \tag{۷}$$

به طوری که $(x_o , y_o)$نشان دهنده بردار ورودی و خروجی $DMU_o$می باشد.

**قضیه ۵.**

الف. $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و فقط اگر $\psi_o^*=1$ یا $\zeta_O^*=1$ یا $(\psi_O^* > 1, \zeta_O^* < 1)$.

ب . $DMU_o$دارای بازده به مقیاس صعودی است اگر و فقط اگر $\zeta_o^* > 1$.

ج. $DMU_o$ دارای بازده به مقیاس نزولی است اگر و فقط اگر $\psi_o^* < 1$.

**برهان.** با توجه به برهان قضیه (۱) بدیهی است.

**قضیه ٦** . فرض کنید $DMU_o$دارای بازده به مقیاس صعودی است. اگر ورودی ها به $\widehat{x}_{io}=\eta\, x_{io}$ تبدیل شوند که $1\leq \eta < \zeta_o^*$، آن گاه $DMU'_o=(\widehat{x}_o , y_o)$ دارای بازده به مقیاس صعودی است.

**برهان.** با توجه به برهان قضیه (۳) بدیهی است.

**قضیه ۷.** فرض کنید $DMU_o$دارای بازده به مقیاس نزولی است. اگر ورودی ها به $\widehat{x}_{io}=\varepsilon\, x_{io}$ تبدیل شوند که $\psi_o{}^* < \varepsilon \leq 1$، آن گاه $DMU'_o=(\widehat{x}_o , y_o)$ دارای بازده به مقیاس نزولی است.

**برهان.** با توجه به برهان قضیه (۲) بدیهی است.

**قضیه ۸ .** فرض کنید $DMU_o$دارای بازده به مقیاس ثابت است. اگر ورودی ها به $\widehat{x}_{io}=\beta\, x_{io}$ تبدیل شوند که $\zeta^* \leq \beta \leq \psi_o^*$، آن گاه $DMU'_o=(\widehat{x}_o , y_o)$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. ( $\beta$ ضریب تغییرات ورودی هاست)

**برهان.** با توجه به برهان قضیه (۴) بدیهی است.

توجه داشته باشید که قضیه (۵) تنها تحلیلی برای پایداری طبقه بندی بازده به مقیاس نیست بلکه طبقه بندی بازده به مقیاس را نیز نشان می دهد.

## ۵ مثال عددی

فرض مجموعه ی داده ها شامل ۱۰ ، DMU است هر کدام دارای یک ورودی و یک خروجی مـی باشـند. مقدار داده ها در جدول (۱) نشان داده شده است.

**جدول ۱.** داده های مثال عددی

| DMU | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ورودی $(x_j)$ | ۲ | ۳ | ۶ | ۷ | ۸ | ۶ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۸ |
| خروجی $(y_j)$ | ۱ | ۲ | ۴ | ۴.۲۵ | ۴.۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴.۴ | ۴ |

$DMU_2$ و $DMU_3$ کارای CCR هستند و $E'_o = \{ DMU_2 \}$ و $E''_o = \{ DMU_1$ و $DMU_2 \}$ ، $DMU_7$ ، $DMU_8$ و $DMU_{10}$ دارای بازده به مقیاس ثابت هستند و $DMU_6 , DMU_1$ دارای بازده به مقیاس صعودی هستند و $DMU_4 , DMU_5$ و $DMU_9$ دارای بازده به مقیاس نزولی می باشند. جدول (۲) مقدار حساسیت بازده به مقیاس $DMU$ های ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ را هنگامی که مقدار خروجی را تغییر می دهیم نشان می دهد.

**جدول ۲.** مقدار حساسیت بازده به مقیاس

| DMU | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|
| حساسیت | $\phi_O^* = 2$ | $\varphi_O^* = 2, \phi_O^* = 1$ | $\varphi_O^* = 4/3, \phi_O^* = 2/3$ | $\varphi_O^* = 4/4.4$ | $\varphi_O^* = 1, \phi_O^* = 0.5$ |
| نتیجه | $\alpha \in [1,2)$ | $\chi \in [1,2]$ | $\chi \in [2/3, 4/3]$ | $\beta \in (4/4.4, 1]$ | $\chi \in [0.5,1]$ |

## ٦ نتیجه گیری

مدل هایی را ارایه دادیم که توسط آن مدل ها ناحیه ی پایداری طبقه بندی بازده به مقیاس مشخص شد. اثر تغییرات خروجی روی مدل $CCR$ در ماهیت ورودی و اثر تغییرات ورودی روی مدل $CCR$ ماهیت خروجی را در نظر گرفتیم. هم چنین مدل هایی که ارایه دادیم نوع بازده به مقیاس را به دست می آورد. در این مقاله تنها واحدهای ناکارا بررسی شدند. باید توجه داشت که آشفتگی واحدهای کارا ممکن است طبقه بندی بازده به مقیاس را تغییر دهد. بنابراین بررسی موقعیت هایی که واحدهای کارا و ناکارا دچار اشفتگی شوند می تواند موضوع تحقیق دیگری باشد.

## منابع


[1] Seiford, L. M., Zhu, J,. (1999). Sensitivity and stability of the classifications of return to scale in data envelopment analysis. Journal of Productivity analysis 12, 55-77.

[2] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operation Research 2, 429-444.

[3] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W.W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science 30, 1078-1092.

[4] Banker, R. D., Thrall, R. M., (1992). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis. European Journal of Operation Research 62, 74-84.

[5] Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., (1985).The measurement of efficiency of production. Boston: Kluwer Nijhoff.
[6] Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., (1994).Production frontiers. Cambridge University Press.