مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره سوم (پیاپی ۶۶)، پاییز ۹۹، ص ص ۷۹-۶۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک روش جدید برای حل مدل‌های بهینه‌سازی تصادفی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی

سید هادی ناصری[1]، **سحر چیتگر**[2*]
۱- دانشیار، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران
۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۱۰ خرداد ۱۳۹۸
پذیرش مقاله: ۲۶ آذر ۱۳۹۸

چکیده
این مقاله به مطالعه مدل‌های بهینه‌سازی چندهدفی تصادفی با محدودیت‌های شانسی می‌پردازد. استفاده از متغیرهای تصادفی به عنوان پارامترهای ورودی در مدل‌های ریاضی، یکی از رویکردهای متعارف برای مدل‌سازی مسایل مختلف در شرایط عدم قطعیت است. همچنین، محدودیت‌های شانسی این امکان را به تصمیم‌گیرنده می‌دهد که محدودیت مربوطه با احتمال حداکثر یک مقدار مشخص شده رد شود. یکی از چالش‌های این گونه مدل‌ها وجود محدودیت‌های شانسی است و حل چنین مدل‌هایی به طور مستقیم امکان‌پذیر نیست و می‌بایست محدودیت داده شده را ابتدا به حالت قطعی تبدیل کرده و سپس با به کارگیری تکنیک‌های موجود، مساله قطعی‌شده حل شود. از عمده‌ترین روش‌هایی که برای تبدیل محدودیت شانسی به حالت قطعی وجود دارد، استفاده از تابع توزیع متغیرهای تصادفی است که می‌بایست در دسترس تصمیم‌گیرندگان باشد؛ اما معمولاً تابع توزیع دقیقی از یک متغیر تصادفی در مسایل واقعی وجود ندارد. به همین دلیل، در این مقاله یک روش مبتنی بر نمونه برای تبدیل محدودیت‌های شانسی به حالت قطعی پیشنهاد می‌شود به طوری که محدودیت شانسی را با بیشترین احتمال برقرار می‌کند. برای حل مدل چندهدفی قطعی به دست آمده از روش مجموع وزین استفاده می‌شود. سرانجام به منظور بررسی کارایی روش پیشنهاد شده، یک مثال عددی ارایه می‌شود.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی تصادفی، بهینه‌سازی چندهدفی، بهینه‌سازی با محدودیت شانسی، روش مبتنی بر نمونه.

۱ مقدمه
اگر زندگی روزمره مورد بررسی قرار گیرد، می‌توان دریافت که بسیاری از مسایل واقعی زندگی نادقیق می‌باشند. در عمل ملاحظه می‌شود که برای اتخاذ تصمیمات مهم در دنیای واقعی با نوعی از عدم قطعیت مواجه هستیم. آن‌چه در اغلب موارد تصمیمات بشر را دچار اشتباه می‌نماید، عدم اطلاعات کافی و در نتیجه بروز عدم قطعیت در مسایل می‌باشد. انسان به عنوان موجود محدودی که نمی‌تواند تمامی متغیرهای یک مساله و عواقب ناشی از

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: sahar.chitgar@gmail.com

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

اتخاذ یک تصمیم را از نظر بگذراند، همواره در پی کسب تجربه، افزایش آگاهی و از بین بـردن ابهامـات موجـود در سر راه خویش می‌باشد. در راه زدودن ابهامـات و کـاهش عـدم قطعیـت، ابتـدا بایـد دانسـت کـه عـدم قطعیـت چیست؟ چرا عدم قطعیت در جهان هستی بروز می‌نماید؟ عدم قطعیت به عنوان یک اصطلاح در میان مـردم دارای مفهوم مشخصی می‌باشد که ممکن است این مفهوم در علوم مختلف تعاریف متفاوتی داشـته باشـد. در هـر علـم و هر حوزه عدم قطعیت همان ابهامات موجود در آن فضا را در بر می‌گیرد. اما عدم قطعیـت بـه عنـوان یـک مفهـوم عمومی، اصطلاحی است که عدم اطمینان انسان را در مورد برخی اشخاص یا اشیاء نشان می‌دهد و بازه‌ی باز میـان اطمینان کامل و عدم اطمینان محض را در بر می‌گیرد. عدم قطعیت را می‌توان به عنوان خاصیتی از سیسـتم در نظـر گرفت که توصیف‌کننده‌ی نقص دانش بشر درباره‌ی یک سیستم و وضعیت پیشرفت آن می‌باشد. همان‌طور که از تعاریف عدم قطعیت بر می‌آید، نبود آگاهی سرچشمه‌ی اصلی حضور در چنـین وضـعیتی اسـت. زمـانی کـه قـرار است یک تصمیم اتخاذ گردد، عدم قطعیت در این است که تصمیم‌گیرنـده نمـی‌دانـد کـدام موقعیـت طبیعـی رخ می‌دهد. باید توجه داشت که در مقابل عدم قطعیت‌های متفاوت، اساسی‌تـرین مسـاله یـافتن منبـع ایجـاد ایـن عـدم قطعیت است. اصولاً تنها دلیل ایجاد عدم اطمینان در رابطه با یک مورد خـاص، عـدم آگـاهی کـافی در آن زمینـه است. این عدم آگاهی می‌تواند انواع گوناگونی داشته باشد، اما به طور کلی می‌توان در دو دسته ی زیـر جـای داد [۱]:

- تغییرپذیری طبیعی[1]
- عدم قطعیت دانش[2]

به طور کلی می‌توان گفت تغییرپذیری طبیعی به مشاهدات تصادفی در طبیعت و عدم قطعیت دانش به وضعیت دانش در مورد یک سیستم فیزیکی و توانایی بشر به منظور اندازه‌گیری و مدل نمودن آن بر می‌گردد.

اکثر پدیده‌های جهان و یا شاید همه‌ی آن‌ها دچار عدم قطعیت هستند. برخی از این پدیده‌ها قابل آزمایش هستند، از این‌رو به علت تغییرپذیری طبیعت در هر آزمایش ممکن است نتیجه‌ی جدیدی به‌دست آید. نتایج حاصل از پدیده‌های آزمایش شدنی معمولاً از روند خاصی پیروی می‌نمایند و می‌توان پس از آزمایش‌های بسیار نتیجه‌ی آزمایش جدید را پیش‌بینی نمود. از این پدیده‌ها به عنوان پدیده‌های تصادفی یاد می‌شود [۲].

یکی از ابزارهای مناسب برای بیان عدم قطعیت در مدل‌های ریاضی، پارامترهای تصادفی هستند. چندین پارامتر از یک مدل بهینه‌سازی را می‌توان به صورت نادقیق در نظر گرفت. به عنوان مثال هزینه تولید و توزیع به طور معمول وابسته به هزینه‌ی سوخت است که یک متغیر تصادفی است. تقاضای آینده از یک محصول وابسته به شرایط اقتصادی نادقیق است. بازده محصولات کشاورزی وابسته به شرایط آب و هوایی نادقیق است. عدم قطعیت نتیجه‌ی یک آزمایش تصادفی است. مدل برنامه‌ریزی تصادفی یک مدل برنامه‌ریزی است که برخی از اطلاعات یا پارامترهای مدل به صورت تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. متغیرهای تصادفی را می‌توان به صورت توزیع

[1] Natural Variability
[2] Knowledge Uncertainty

احتمالی، تابع چگالی و یا به طور کلی با اندازه‌های احتمالی نشان داد. مقادیر این متغیرهای تصادفی تنها پس از انجام آزمایشات تصادفی معلوم می‌شود.

دو رویکرد مهم از مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی به صورت زیر است [۳]:

۱- برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای[1]

۲- برنامه‌ریزی محدودیت‌های شانسی[2]

تکنیک برنامه‌ریزی دو مرحله‌ای توسط دانتزیگ[3] برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی پیشنهاد شد. این تکنیک مدل برنامه‌ریزی تصادفی را به یک مدل قطعی تبدیل می‌کند [۴]. تکنیک برنامه‌ریزی محدودیت‌های شانسی توسط چارنز و کوپر[4] معرفی شد و برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی شامل محدودیت‌های شانسی استفاده می‌شود یعنی محدودیت‌هایی که با یک احتمال محدود نقض می‌شوند [۵].

در سال‌های اخیر محققان متعددی را می‌توان یافت که بر روی مدل‌های بهینه‌سازی با محدودیت‌های شانسی مطالعه کرده‌اند. در اینجا به برخی از این نمونه‌ها اشاره می‌کنیم. در [۶]، نویسندگان بر روی مدل‌های بهینه‌سازی شامل محدودیت‌های شانسی فردی متمرکز شده‌اند، که در آن فقط بردار سمت راست با توزیع محدود تصادفی است. یک کلاس از مدل‌های اخیراً معرفی شده ، سطح اطمینان / تحمل ریسک مرتبط با محدودیت‌های شانسی را به عنوان متغیرهای تصمیم‌گیری معامله می‌کند و مبلغ واقعی هزینه / بازده را با هزینه‌های سطح اطمینان قابل انتخاب در تابع هدف معامله می‌کند. در [۷]، نویسندگان یک چارچوب مدل‌سازی کمی مقیاس‌پذیر را برای ارزیابی اثرات تغییرپذیری در منابع تجدیدپذیر در عملیات ریزگرد ارایه دادند. مساله به عنوان یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای با محدویت‌های شانسی مدل‌سازی شده است. اسچوتز و همکارانش از روش تقریب میانگین نمونه برای حل یک مدل طراحی زنجیره‌تامین با محدودیت شانسی در شرایط عدم قطعیت استفاده کردند [۸]. هومم دِملّو و همکارش از روش تقریب میانگین نمونه و برنامه‌ریزی عدد صحیح برای حل مدل برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های شانسی مربوط به مساله فروشنده دوره‌گرد استفاده کردند [۹]. برخی نظریه‌ها و کاربردهای روش تقریب میانگین نمونه برای مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های شانسی را می‌توان در مراجع [۳]، [۸] و [۹] یافت. سهیلا خویشتن‌دار از روش مبتنی بر نمونه‌گیری برای حل یک مدل با محدودیت‌های شانسی برای مساله زنجیره‌تامین گاز استفاده کردند [۱۰]. ناعمه زرین پور یک مساله چندهدفی مکان‌یابی تسهیلات ظرفیت دار را به صورت یک مدل بهینه‌سازی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی مدل‌سازی کردند و روش الگوریتم‌های چندهدفی تکاملی را برای حل این مدل به کاربردند [۱۱]. ناصری و باوندی با استفاده از تابع عضویت هذلولوی مدلی را برای حل مسایل برنامه‌ریزی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی ارایه کردند [۱۲]. بیلسل و همکارش یک مساله انتخاب تامین‌کننده در شرایط عدم قطعیت را با استفاده از مدل برنامه‌ریزی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی مدل‌سازی نمودند [۱۳]. فارینا و همکارانش مروری بر مدل‌های

[1] Two Stage Stochastic Programming
[2] Chance Constrainted Programming
[3] Dantzig
[4] Charnes and Cooper

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

خطی تصادفی کنترل پیش‌بینی با محدودیت‌های شانسی در مرجع [۱۴] داشتند. زی و همکارانش مساله‌ی مدیریت کیفیت منابع آب در یک منطقه‌ی جدید در چین را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی مدل‌سازی کردند [۱۵]. زو و همکارانش برای مدل‌سازی مساله‌ی مدیریت زباله‌های جامد شهری در شرایط عدم قطعیت از یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های شانسی استفاده کردند [۱۶]. یکی از چالش‌های این گونه مدل‌ها وجود محدودیت‌های شانسی است و حل چنین مدل‌هایی به طور مستقیم امکان‌پذیر نیست و می‌بایست محدودیت داده شده را ابتدا به حالت قطعی تبدیل کرده و سپس با به کارگیری تکنیک‌های موجود، مساله قطعی شده حل شود. از عمده‌ترین روش‌هایی که برای تبدیل محدودیت شانسی به حالت قطعی وجود دارد، استفاده از تابع توزیع متغیرهای تصادفی است که می‌بایست در دسترس تصمیم‌گیرندگان باشد؛ اما معمولاً تابع توزیع دقیقی از یک متغیر تصادفی در مسایل واقعی وجود ندارد. به همین دلیل، در این مقاله یک روش مبتنی بر نمونه برای تبدیل محدودیت‌های شانسی به حالت قطعی پیشنهاد می‌شود به طوری که محدودیت شانسی را با بیشترین احتمال برقرار می‌کند. برای حل مدل چندهدفی قطعی به دست آمده از روش مجموع وزین استفاده می‌شود. مباحث ارایه شده در این مطالعه به صورت زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش دوم تعاریف و پیش‌نیازها ارایه می‌شود. در بخش سوم روش‌های موجود برای حل مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی بیان می‌شود. بخش چهارم به تشریح روش ارایه‌شده برای مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی پرداخته است. به منظور بررسی کارایی روش ارایه شده، در بخش پنجم یک مثال عددی آورده شده است. سر انجام برخی نتایج استخراج شده از این پژوهش و پیشنهادهایی برای مطالعات آتی در بخش ششم بیان شده است.

۲ تعاریف و پیش‌نیازها

در این بخش، برخی مفاهیم و تعاریف پایه‌ای از نظریه احتمال بیان خواهد شد که عمدتاً از مراجع [۱۲] و [۱۷] اقتباس شده است.

تعریف ۲-۱. به نتیجه‌ی یک آزمایش تصادفی پیشامد می‌گویند و آن را با نماد ω نشان می‌دهند.

تعریف ۲-۲. مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن از یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌نامند و آن را با نماد Ω نمایش می‌دهند.

تعریف ۲-۳. چندین نتیجه‌ی تصادفی می‌توانند با هم ترکیب شوند و زیرمجموعه‌ای از Ω به نام اتفاق تصادفی را به وجود آورند. مجموعه‌ی تمام اتفاقات تصادفی را با Σ نمایش می‌دهند. به ازای هر $A \in \Sigma$ یک مقدار $P(A)$ مربوط می‌شود که نشان دهنده احتمال به وقوع پیوستن اتفاق A است.

تعریف ۲-۴. یک فضای احتمال با سه تایی (Ω,Σ,P) تعریف می‌شود.

تعریف ۲-۵. فرض کنید (Ω,Σ,P) یک فضای احتمال باشد. اگر $X:\Omega \to \mathbb{R}$ تابع حقیقی مقدار با دامنه‌ی عناصر Ω باشد، آن‌گاه X یک متغیر تصادفی نامیده می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

قضیه ۲-۱. فرض کنید $Z = aX + bY$ یک ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی مستقل X و Y باشد که خود نیز یک متغیر تصادفی می‌باشد. اگر میانگین و واریانس آن به ترتیب به صورت μ_Z و $\sigma_Z^۲$ تعریف شود، آن گاه نتایج زیر صادق است:

$$\begin{aligned} \mu_Z &= a\mu_X + b\mu_Y \\ \sigma_Z^۲ &= a^۲\sigma_X^۲ + b^۲\sigma_Y^۲ \end{aligned} \qquad (۱)$$

تعریف ۲-٦. یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفی را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} &\max \quad \{F_۱(x), F_۲(x), \ldots, F_K(x)\} \\ &s.t. \quad G(x) \leq ۰ \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در یک زمان می‌بایست همه‌ی اهداف تا حد امکان برآورده گردد.

تعریف ۲-۷ (نقطه پارتو و جواب پارتو [۱۸]**).** نقطه‌ی شدنی x^* را یک نقطه‌ی پارتوی ضعیف برای مساله (۲) می‌گویند اگر هیچ x شدنی وجود نداشته باشد به طوری که به ازای هر $k = ۱,۲,\ldots,K$، $F_k(x) > F_k(x^*)$. همچنین، اگر هیچ x شدنی موجود نباشد به طوری که به ازای هر $k = ۱,۲,\ldots,K$، $F_k(x) \geq F_k(x^*)$، آن‌گاه نقطه x^* را یک نقطه‌ی پارتو نامند. در واقع، یک نقطه‌ی شدنی x^* پارتو است، اگر حرکت از نقطه‌ی x^* به نقطه‌ی شدنی دیگر x که موجب بهبود یک تابع هدف می‌شود، باعث بدتر شدن حداقل یک تابع هدف دیگر شود. مجموعه تمام نقاط پارتوی یک مساله را جواب پارتو می‌نامند.

۳ روش‌های موجود برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی

یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۷]:

$$\begin{aligned} &max\ z^{(k)}(\omega,x) = \sum_{j=۱}^{n} c_j^{s(k)}(\omega) x_j, \quad k = ۱,۲,\ldots,K \\ &s.t.\ P\left[\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^s(\omega) x_j \leq b_i^s(\omega)\right] \geq \alpha_i, \quad i = ۱,۲,\ldots,m, \\ &x_j \geq ۰, \quad j = ۱,۲,\ldots,n, \\ &\alpha_i \in [۰,۱], \quad i = ۱,۲,\ldots,m, \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن $c_j^{s(k)}(\omega)$، $a_{ij}^s(\omega)$ و $b_i^s(\omega)$ به ازای هر $k = ۱,۲,\ldots,K$، $i = ۱,۲,\ldots,m$ و $j = ۱,۲,\ldots,n$ متغیرهای تصادفی هستند و آن‌ها را به اختصار به ترتیب به صورت $c_j^{s(k)}$، a_{ij}^s و b_i^s می‌نویسیم. همچنین، $\alpha_i \in [۰,۱]$ نشان‌دهنده‌ی حداقل سطح احتمال قابل قبول برای ارضای محدودیت i است و توسط تصمیم‌گیرنده به نحوی مشخص می‌شود که نیازهای ایمنی و امنیتی را برآورده سازد. در واقع، $P\left[\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^s x_j \leq b_i^s\right] \geq \alpha_i$ یک محدودیت شانسی است که با احتمال حداقل α_i می‌بایست برآورده شود.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های شانسی به شکل (۳) دارای دو مشکل اساسی هستند[۱۹]:

۱) در حالت کلی به ازای یک بردار x داده شده، محاسبه‌ی مقدار $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{s} x_j \le b_i^s\right]$ مشکل است، یعنی ممکن است شامل انتگرال‌های چندگانه با بعد بالا باشد. در نتیجه، بررسی شرط شدنی بودن یک جواب سخت می‌شود.

۲) مجموعه‌ی شدنی تعریف شده توسط محدودیت $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{s} x_j \le b_i^s\right] \ge \alpha_i$ نامحدب است.

روش‌های مختلفی برای رفع مشکلات بیان شده پیشنهاد شده است که در ادامه به مرور برخی از این روش‌ها پرداخته می‌شود.

۳-۱ روش مبتنی بر میانگین و واریانس[1]

مساله را برای حالت کلی یعنی زمانی که a_{ij}^s، b_i^s و $c_j^{s(k)}$ به ازای هر $k=1,2,\ldots,K$، $i=1,2,\ldots,m$ و $j=1,2,\ldots,n$ تصادفی باشند، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\mathrm{E}\left(a_{ij}^s\right)$ و $Var\left(a_{ij}^s\right)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی امید و واریانس متغیر تصادفی a_{ij}^s و $\mathrm{E}\left(b_i^s\right)$ و $Var\left(b_i^s\right)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی امید و واریانس متغیر تصادفی b_i^s و $\mathrm{E}\left(c_j^{s(k)}\right)$ و $Var\left(c_j^{s(k)}\right)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی امید و واریانس متغیر تصادفی $c_j^{s(k)}$ باشند.

ابتدا مشکل وجود محدودیت‌های شانسی در مجموعه محدودیت‌های مدل (۳) را بررسی می‌کنیم. متغیر تصادفی h_i^s به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_i^s = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j - b_i^s, \quad i=1,2,\ldots,m \tag{۴}$$

امید و واریانس متغیر تصادفی h_i^s به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{E}(h_i^s) = \mathrm{E}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j - b_i^s\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}(a_{ij}^s) x_j - \mathrm{E}(b_i^s), \quad i=1,2,\ldots,m \tag{۵}$$

$$Var(h_i^s) = Var\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j - b_i^s\right) = Var\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j\Big) + Var(b_i^s) - 2Cov\left(a_{ij}^s, b_i^s\right), \quad i=1,2,\ldots,m \tag{۶}$$

اگر متغیرهای تصادفی a_{ij}^s و b_i^s مستقل از یکدیگر باشند یعنی به ازای هر $i=1,2,\ldots,m$ و $j=1,2,\ldots,n$، $Cov\left(a_{ij}^s, b_i^s\right)=0$، در این صورت واریانس متغیر تصادفی h_i^s به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Var(h_i^s) = Var\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j - b_i^s\right) = Var\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s\Big) x_j^2 + Var(b_i^s), \quad i=1,2,\ldots,m \tag{۷}$$

در این صورت محدودیت شانسی $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j \le b_i^s\right] \ge \alpha_i$ را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$P\left[h_i^s \le 0\right] \ge \alpha_i \Leftrightarrow P\left[\frac{h_i^s - \mathrm{E}(h_i^s)}{\sqrt{Var\left(h_i^s\right)}} \le \frac{-\mathrm{E}(h_i^s)}{\sqrt{Var\left(h_i^s\right)}}\right] \ge \alpha_i \tag{۸}$$

[1] Variance and mean-based method

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

با تعریف $\Psi=\frac{h_i^s-\mathrm{E}(h_i^s)}{\sqrt{Var\left(h_i^s\right)}}$ و فرض این که Ψ_{α_i} نشان دهنده‌ی α_i- چندک از Ψ باشد، آن‌گاه $\mathrm{E}\left(\Psi\right)=\circ$ و $Var\left(\Psi\right)=۱$ و رابطه‌ی (۸) با رابطه‌ی زیر معادل می‌شود:

$$P\left[h_i^s\leq\circ\right]\geq\alpha_i \Leftrightarrow \frac{-\mathrm{E}(h_i^s)}{\sqrt{Var(h_i^s)}}\geq\Psi_{\alpha_i} \Leftrightarrow \mathrm{E}(h_i^s)+\Psi_{\alpha_i}\sqrt{Var(h_i^s)}\leq\circ \tag{۹}$$

در واقع Ψ_{α_i} نشان دهنده‌ی α_i- چندک استاندارد از Ψ می‌باشد و به عنوان ضریب پایایی محدودیت شانسی i - ام تعریف می‌شود. ضریب پایایی Ψ_{α_i}مربوط به درجه‌های مختلف α_i برای برخی از توزیع‌های رایج در مرجع [۲۰] آورده شده است.

با استفاده از روش بیان شده، محدودیت شانسی مدل (۳) به یک محدودیت قطعی تبدیل می‌شود.

حال به رفع مشکل وجود متغیرهای تصادفی در ضرایب تابع هدف می‌پردازیم. در این صورت امید ریاضی و واریانس تابع هدف $z^{(k)}(x)$ به ازای هر $k=۱,۲,...,K$، به ترتیب به صورت $\mathrm{E}\left(z^{(k)}\right)=\sum_{j=۱}^{n}\mathrm{E}(c_j^{s(k)})x_j$ و $Var\left(z^{(k)}\right)=X^TC^{(k)}X$ می‌باشد که در آن ماتریس کوواریانس $C^{(k)}$ به صورت زیر است:

$$C^{(k)}=\begin{bmatrix} Var(c_۱^{s(k)}) & Cov(c_۱^{s(k)},c_۲^{s(k)}) & \cdots & Cov(c_۱^{s(k)},c_n^{s(k)}) \\ Cov(c_۲^{s(k)},c_۱^{s(k)}) & Var(c_۲^{s(k)}) & \cdots & Cov(c_۲^{s(k)},c_n^{s(k)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(c_n^{s(k)},c_۱^{s(k)}) & Cov(c_n^{s(k)},c_۲^{s(k)}) & \cdots & Var(c_n^{s(k)}) \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

اگر هر یک از ضرایب تابع هدف مستقل از یکدیگر باشند آن‌گاه $Var\left(z^{(k)}\right)=\sum_{j=۱}^{n}Var(c_j^{s(k)})x_j^۲$.

با این تعاریف، مدل (۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & max \quad f^{(k)}(x) \quad , \quad k=۱,۲,...,K \\ & s.t. \quad P\left(z^{(k)}(x)\geq f^{(k)}(x)\right)\geq\beta^{(k)}\,, \quad k=۱,۲,...,K \\ & \qquad P\left[\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}^s x_j\leq b_i^s\right]\geq\alpha_i\,, \quad i=۱,۲,...,m \\ & \qquad x_j\geq\circ, \quad j=۱,۲,...,n \\ & \qquad \alpha_i\in\left[\circ,۱\right], \quad i=۱,۲,...,m \\ & \qquad \beta^{(k)}\in\left[\circ,۱\right], \quad k=۱,۲,...,K \end{aligned} \tag{۱۱}$$

در این صورت به ازای هر $k=۱,۲,...,K$، روابط زیر برقرار است:

$$P\left(z^{(k)}(x)\geq f^{(k)}(x)\right)\geq\beta^{(k)}$$
$$\Leftrightarrow P\left[\frac{z^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)-\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)+f^{(k)}(x)}{\sqrt{X^TC^{(k)}X}}\geq\frac{-\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)+f^{(k)}(x)}{\sqrt{X^TC^{(k)}X}}\right]\geq\beta^{(k)}$$
$$\Leftrightarrow P\left[\frac{z^{(k)}(x)-\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)}{\sqrt{X^TC^{(k)}X}}\geq\frac{-\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)+f^{(k)}(x)}{\sqrt{X^TC^{(k)}X}}\right]\geq\beta^{(k)} \qquad (۱۲)$$
$$\Leftrightarrow P\left[\frac{z^{(k)}(x)-\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)}{\sqrt{X^TC^{(k)}X}}<\frac{-\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)+f^{(k)}(x)}{\sqrt{X^TC^{(k)}X}}\right]<۱-\beta^{(k)}$$

با تعریف $\Lambda=\frac{z^{(k)}(x)-\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)}{\sqrt{X^TC^{(k)}X}}$ و فرض این که $\Lambda_{۱-\beta^{(k)}}$ نشان دهنده‌ی $(۱-\beta^{(k)})$- چندک استاندارد از Λ باشد، آن‌گاه روابط (۱۲) با رابطه‌ی زیر معادل هستند:

$$\frac{-\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)+f^{(k)}(x)}{\sqrt{X^TC^{(k)}X}}\leq\Lambda_{۱-\beta^{(k)}}\Leftrightarrow\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)+\Lambda_{۱-\beta^{(k)}}\sqrt{X^TC^{(k)}X}\geq f^{(k)}(x) \qquad (۱۳)$$

از آنجایی که $\Lambda_{۱-\beta^{(k)}}=-\Lambda_{\beta^{(k)}}$ رابطه (۱۳) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)-\Lambda_{\beta^{(k)}}\sqrt{X^TC^{(k)}X}\quad,\quad k=۱,۲,\ldots,K \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری روابط (۹) و (۱۴) به ترتیب برای محدودیت‌های شانسی و ضرایب تصادفی در تابع هدف مدل (۳)، مدل قطعی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&max \quad \mathrm{E}\left(z^{(k)}(x)\right)-\Lambda_{\beta^{(k)}}\sqrt{X^TC^{(k)}X}\quad ,k=۱,۲,\ldots,K\\
&s.t.\quad \mathrm{E}\Big(\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}^{s}x_j-b_i^{s}\Big)+\Psi_{\alpha_i}\sqrt{Var(a_{ij}^{s}x_j-b_i^{s})}\leq ۰, i=۱,۲,\ldots,m,\\
&\qquad x_j\geq ۰, j=۱,۲,\ldots,n,\\
&\qquad \alpha_i\in[۰,۱],\quad i=۱,۲,\ldots,m,\\
&\qquad \beta^{(k)}\in[۰,۱]
\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

در روش یاد شده در بالا مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی (۳) به یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفی قطعی به شکل (۱۵) تبدیل شده و بدیهی است که با روش‌های کلاسیک قابل حل می‌باشد. برخی از مقالاتی که از این روش برای حل مدل برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های شانسی استفاده کردند، عبارتند از: ناصری و همکارش [۱۲]، لین ما و همکارش [۲۱]، کریشنندو و همکارانش [۲۲].

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

۳-۲ روش مبتنی بر نمونه[1]

جیمز و همکارش در سال ۲۰۰۸، روشی برای رفع مشکل اول، روش تقریب نمونه را پیشنهاد کردند که مبتنی بر نمونه مونت کارلو از متغیر تصادفی ω می‌باشد. روش تقریب نمونه با جایگزینی تابع توزیع تجربی به جای تابع توزیع واقعی از یک نمونه تصادفی به دست می‌آید [۱۹]. ایشان در این مقاله نشان دادند که چگونه این تقریب می‌تواند جواب‌های شدنی و کران‌های بهینه برای مدل برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های شانسی تولید کند.
روند کلی این روش‌ها ساخت یک مساله تقریبی است که به صورت زیر ساخته می‌شود.
مجموعه‌ی $\left\{z_N^{(k)}(x)\right\}$ از تقریب‌های تصادفی تابع $z^{(k)}(x,\omega)$ را در نظر بگیرید. هر $z_N^{(k)}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$z_N^{(k)}(x)=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} z^{(k)}\left(x,\omega^l\right) \tag{۱۶}$$

که در آن $\left\{\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^N\right\}$ یک نمونه از تابع توزیع متغیر تصادفی ω است. زمانی که ω^lها دو به دو مستقل باشند کمیت $z_N^{(k)}(x)$ را یک برآوردگر مونت کارلو[2] می‌نامند. در این صورت هر یک از توابع هدف مدل (۳) با تابع هدف متناظرش در رابطه (۱۶) تقریب زده می‌شود.
همچنین، هر محدودیت شانسی در مدل (۳)، با محدودیت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\mathrm{I}\left\{h_i(x,\omega^l)>0\right\}\le 1-\gamma_i,\ i=1,2,\ldots,m \tag{۱۷}$$

که در آن $I\{.\}$ و $h_i\left(x,\omega^l\right)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s\left(\omega^l\right)x_j-b_i^s\left(\omega^l\right)$ نشان‌دهنده‌ی تابع مشخصه‌ی محدودیت $h_i\left(x,\omega^l\right)>0$ است به طوری که اگر $h_i\left(x,\omega^l\right)>0$ باشد برابر یک و در غیراینصورت برابر صفر است. به این نکته اشاره می‌کنیم که در این جا $\left(1-\gamma_i\right)$ به جای α_i در مقدار سمت راست مدل (۳) جایگزین شده است که در آن γ_i یک پارامتر است که می‌تواند توسط تصمیم گیرنده یا روش دیگری به دست آید. با تعاریف انجام شده مدل تقریبی متناظر با مدل (۳) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \quad \left\{z_N^{(k)}(x)=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} z^{(k)}\left(x,\omega^l\right),\forall k=1,2,\ldots,K\right\}\\ &s.t. \quad \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\mathrm{I}\left\{h_i(x,\omega^l)>0\right\}\le\left(1-\gamma_i\right),i=1,2,\ldots,m,\\ &\qquad x_j\ge 0,\quad j=1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{۱۸}$$

همان طور که مشاهده می‌شود با تغییر γ_i فضای شدنی مساله تغییر خواهد کرد در این صورت بحث شدنی بودن مساله اهمیت می‌یابد. روش یاد شده را روش تقریب میانگین نمونه[3] (SAA) می‌نامند.
دو مورد از مهم‌ترین پرسش‌هایی که در به کارگیری روش تقریب میانگین نمونه به وجود می‌آید، انتخاب اندازه نمونه برای شدنی بودن مساله اصلی و همگرایی این روش است که در ادامه به این دو پرسش پاسخ می‌دهیم.

---
[1] Sample-based method
[2] Monte Carlo Estimator
[3] Sample Average Approximation

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

پاگنونسلی و همکارانش در سال ۲۰۰۹ ثابت کرده‌اند که تحت شرایط[۲۳]:

۱. پیوستگی هر یک از توابع $z^{(k)}$، $k=1,2,...,K$ و h_i، $i=1,2,...,m$ نسبت به x

۲. فشردگی فضای محدودیت‌های غیرشانسی مساله

۳. وجود جواب بهینه x^* به طوری که به ازای برخی x در همسایگی x^* شرط $P\left[h_i^s\left(x,\omega\right)\leq 0\right]\geq\alpha_i$ برقرار باشد،

جواب پارتوی به دست آمده از حل مدل (۱۸)، به جواب پارتوی مدل (۳) و مقدار پارتوی به دست آمده از حل مدل (۱۸) به مقدار پارتوی مدل (۳) همگراست.

همچنین، کمپی و همکارانش در سال ۲۰۰۹ ثابت کرده‌اند که به ازای هر $0<\delta\leq 1$ با انتخاب $N\geq\frac{2}{1-\alpha}\left(\log\frac{1}{\delta}+d_x\right)$ که در آن d_x بعد متغیر تصادفی x است، جواب پارتوی به دست آمده از حل مدل (۱۸) با احتمال حداقل $\left(1-\delta\right)$ یک جواب شدنی برای مدل اصلی (۳) است [۲۴].

در این جا تمییزی بین دو حالت $\gamma_i=1$ و $\gamma_i<1$ قرار دارد. زمانی که $\gamma_i=1$ باشد، مدل (۱۸) معادل مدل زیر است:

$$\begin{aligned}
&\max \quad \left\{z_N^{(k)}(x)=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}z^{(k)}\left(x,\omega^l\right)\right\}\\
&s.t. \qquad h_i(x,\omega^l)\leq 0,\ l=1,2,...,N\\
&\qquad\qquad x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n
\end{aligned}\tag{19}$$

که در این صورت مدل (۱۹) یک مساله برنامه‌ریزی معمولی است که با روش‌های موجود قابل حل می‌باشد.

در حالتی که $\gamma_i<1$ باشد، به علت وجود تابع مشخصه در مدل (۱۸) خاصیت محدب بودن مدل از دست می‌رود. به منظور رفع این مشکل، جیمز و همکارانش روش برنامه‌ریزی عدد صحیح را ارایه کردند [۲۵]. با به کارگیری روش ارایه شده توسط ایشان، مدل (۱۸) به صورت یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \quad \left\{z_N^{(k)}(x)=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}z^{(k)}\left(x,\omega^l\right),\forall k=1,2,...,K\right\}\\
&S.t. \qquad h_i(x,\omega^l)\leq M\times y_i^l,\forall i=1,2,...,m,l=1,2,...,N\\
&\qquad\qquad \sum_{l=1}^{N}y_i^l\leq N\left(1-\gamma_i\right),\forall i=1,2,...,m,\\
&\qquad\qquad x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n,\\
&\qquad\qquad y_i^l\in\{0,1\},i=1,2,...,m,l=1,2,...,N
\end{aligned}\tag{20}$$

که در آن y_i^l نشان‌دهنده‌ی متغیرهای دودویی محدودیت $i-$ام و نمونه‌ی $l-$ام و $M=\max\limits_{\substack{i=1,2\\ l=1,2,...,N}}\left\{b_i^s\left(\omega^l\right)\right\}$ است. در واقع زمانی که $y_i^l=0$ باشد، یعنی شرط $h_i(x,\omega^l)\leq 0$ برقرار است. با به کارگیری این روش، مدل

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های شانسی (۳) به یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط تقریبی به صورت (۲۰) تبدیل می‌شود که با روش‌های موجود در ادبیات موضوع قابل حل است.

در اینجا بر اساس نتایج ارایه شده در [۱۱] قضیه زیر آورده شده است.

قضیه۳-۱. مجموعه جواب مدل‌های (۲۰) و (۱۸) معادل هستند. یعنی هر جواب شدنی از یکی از این مدل‌ها، یک جواب شدنی برای مدل دیگر نیز هست.

اثبات. فرض می‌کنیم $\left(x, y_1^1, ..., y_m^N\right)$ یک جواب شدنی از مدل (۲۰) باشد. در این صورت طبق محدودیت اول مدل (۲۰) به ازای هر $i = 1, 2, ..., m$ و $l = 1, 2, ..., N$ داریم: $y_i^l \geq \mathrm{I}\left\{h_i(x, \omega^l) > 0\right\}$. با توجه به محدودیت دوم مدل (۲۰) به ازای هر $i = 1, 2, ..., m$ داریم: $\sum_{l=1}^{N} y_i^l \leq N\left(1-\gamma_i\right)$. در این صورت به ازای هر $i = 1, 2, ..., m$:

$$\left(1-\gamma_i\right) \geq \left(N^{-1}\right)\sum_{l=1}^{N} y_i^l \geq \left(N^{-1}\right)\sum_{l=1}^{N} \mathrm{I}\left\{h_i(x, \omega^l) > 0\right\} \qquad (21)$$

در این صورت x یک جواب شدنی برای مدل (۱۸) است. برعکس، فرض کنیم x یک جواب شدنی برای مدل (۱۸) باشد. به ازای هر $i = 1, 2, ..., m$ و $l = 1, 2, ..., N$ تعریف می‌کنیم: $y_i^l = \mathrm{I}\left\{h_i(x, \omega^l) > 0\right\}$. در این صورت x یک جواب شدنی برای مدل (۲۰) نیز می‌شود.■

٤ روش پیشنهادی

همان‌طور که در بخش ۳-۲ بیان کردیم، پارامتر γ_i در مدل (۱۸) می‌تواند توسط تصمیم‌گیرنده طبق اطلاعات و سوابق گذشته داده شود که لزوماً این مقدار داده شده برای γ_i بهترین مقدار آن نخواهد بود. در واقع یکی از چالش‌های روش تقریب میانگین نمونه، انتخاب مقدار مناسب از γ_i است به طوری که شدنی بودن مساله نیز حفظ شود. روش‌های مختلفی برای دستیابی به مقدار مناسبی از γ_i در ادبیات موضوع موجود است که می‌توان به مراجع [۳]، [۲۳]، [۲۵] و [۲۶] اشاره کرد. در واقع با افزایش مقدار γ_i یعنی کاهش مقدار $\left(1-\gamma_i\right)$، احتمال برقراری محدودیت $h_i(x, \omega^l) > 0$ کاهش و در نتیجه احتمال برقراری محدودیت اصلی مدل یعنی $h_i(x, \omega^l) \leq 0$ افزایش می‌یابد. از آنجایی که همواره به دنبال افزایش احتمال برقراری محدودیت $h_i(x, \omega^l) \leq 0$ هستیم بنابراین، مایلیم هم زمان با برآورد اهداف مدل، مقدار پارامتر γ_i نیز افزایش یابد. بدین منظور یک تابع هدف جدید به صورت $\max \sum_{i=1}^{m} \gamma_i$ به اهداف مساله اضافه می‌کنیم. در این صورت یک تابع هدف به مدل (۲۰) اضافه می‌شود. در واقع تعداد اهداف مساله $K+1$ می‌شود. همچنین، به منظور حذف مقادیر پایین γ_i، یک کران پایین برای γ_i در نظر می‌گیریم و آن را γ_i^L می‌نامیم. بنابراین به ازای هر $i = 1, 2, ..., m$، محدودیت $\gamma_i \geq \gamma_i^L$ نیز به مجموعه قیود مدل اضافه می‌شود. برای حل مدل برنامه‌ریزی چندهدفی به دست آمده از روش کلاسیک مجموع وزین استفاده می‌کنیم. برای مطالعه روش مجموع وزین برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفی به مرجع [۲۷] مراجعه نمایید.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

٤-١ الگوریتم روش پیشنهادی

در این بخش، گام‌های الگوریتم پیشنهادی برای حل یک مدل بهینه‌سازی چندهدفی تصادفی با محدودیت‌های شانسی را بیان می‌کنیم.

گام ۱. ابتدا مدل برنامه‌ریزی تصادفی چند هدفی با محدودیت‌های شانسی را با استفاده از روش تقریب میانگین نمونه و برنامه‌ریزی عدد صحیح به یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفی قطعی به شکل (۲۰) تبدیل می‌کنیم.

گام ۲. هدف $\max \sum_{i=1}^{m} \gamma_i$ را به توابع هدف مساله اضافه می‌کنیم.

گام ۳. به ازای هر $i=1,2,\ldots,m$، یک کران پایین برای γ_i انتخاب می‌کنیم و آن را γ_i^L می‌نامیم. سپس، محدودیت $\gamma_i \geq \gamma_i^L$ را به مدل اضافه می‌کنیم.

گام ٤. به ازای هر $k=1,2,\ldots,K+1$، وزن w_k را برای هر یک از توابع هدف تعیین می‌کنیم.

گام ۵. مدل برنامه‌ریزی چند هدفی عدد صحیح مختلط به دست آمده را با استفاده از روش مجموع وزین حل می‌کنیم و یک جواب پارتو برای آن به دست می‌آوریم.

تذکر٤-۱: با توجه به مطالبی که در مورد همگرایی روش تقریب میانگین نمونه در زیر بخش ۳-۲ یاد شده است، همگرایی الگوریتم پیشنهادی نیز ثابت می‌شود.

الگوریتم اخیر قادر است مساله برنامه‌ریزی چندهدفی تصادفی با محدویت شانسی را در یک مرحله بدون نیاز به تابع توزیع دقیق از پارامترهای تصادفی مساله حل نماید. همچنین، مقدار حداقل احتمال برآورده شدن محدودیت‌های شانسی را بدون دخالت تصمیم‌گیرنده و به عنوان یک پارامتر توسط خود مدل محاسبه نماید.
بخش بعد به توصیف عددی رویکرد ارایه شده اختصاص دارد.

۵ مثال عددی

در این بخش به منظور بررسی کارایی روش ارایه شده در بخش ۴، یک مثال از برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی به صورت مدل (۲۲) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z^{(1)} = c_1^{s(1)}x_1 + c_2^{s(1)}x_2 + c_3^{s(1)}x_3 \\
\max \quad & z^{(2)} = c_1^{s(2)}x_1 + c_2^{s(2)}x_2 + c_3^{s(2)}x_3 \\
\max \quad & z^{(3)} = c_1^{s(3)}x_1 + c_2^{s(3)}x_2 + c_3^{s(3)}x_3 \\
s.t. \quad & P\left(a_{11}^s x_1 + a_{12}^s x_2 + a_{13}^s x_3 \leq b_1^s\right) \geq 0/95 \\
& P\left(a_{21}^s x_1 + a_{22}^s x_2 + a_{23}^s x_3 \leq b_2^s\right) \geq 0/10 \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,3
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در آن به ازای هر $i=1,2$، $j=1,2,3$ و $k=1,2,3$، a_{ij}^s ، b_i^s و $c_j^{s(k)}$ متغیرهای تصادفی نرمال مستقل هستند که مقادیر میانگین و واریانس آن‌ها در جدول ۱ آورده شده است.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

جدول ۱. مقادیر میانگین و واریانس a_{ij}^{s} ، b_{i}^{s} و $c_{j}^{s(k)}$

	a_{11}^{s}	a_{12}^{s}	a_{13}^{s}	a_{21}^{s}	a_{22}^{s}	a_{23}^{s}	b_{1}^{s}	b_{2}^{s}	$c_{1}^{s(1)}$	$c_{2}^{s(1)}$	$c_{3}^{s(1)}$	$c_{1}^{s(2)}$	$c_{2}^{s(2)}$	$c_{3}^{s(2)}$	$c_{1}^{s(3)}$	$c_{2}^{s(3)}$	$c_{3}^{s(3)}$
میانگین	۱	۳	۹	۵	۱	۶	۸	۷	۵	۶	۳	۷	۲	۴	۲	۳	۸
واریانس	۲۵	۱۶	۴	۹	۴	۱	۱۶	۹	۹	۱	۴	۱	۴	۱	۱	۴	۱

حال گام‌های الگوریتم پیشنهادی را برای حل مدل (۲۲) و با انتخاب $N=100$ به کار می‌بریم.

گام ۱. با به کارگیری روش تقریب میانگین نمونه و برنامه‌ریزی عدد صحیح، مدل برنامه‌ریزی چندهدفی قطعی معادل با مدل (۲۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z^{(1)} = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\
&\max \quad z^{(2)} = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
&\max \quad z^{(3)} = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
&s.t. \quad a_{11}^{s}\left(\omega_{11}^{l}\right)x_1 + a_{12}^{s}\left(\omega_{12}^{l}\right)x_2 + a_{13}^{s}\left(\omega_{13}^{l}\right)x_3 - b_{1}^{s}\left(\omega_{1}^{l}\right) \le M \times y_1^{l}, \forall l = 1,2,\dots,100 \\
&\qquad a_{21}^{s}\left(\omega_{21}^{l}\right)x_1 + a_{22}^{s}\left(\omega_{22}^{l}\right)x_2 + a_{23}^{s}\left(\omega_{23}^{l}\right)x_3 - b_{2}^{s}\left(\omega_{2}^{l}\right) \le M \times y_2^{l}, \forall l = 1,2,\dots,100 \\
&\qquad \sum_{l=1}^{100} y_1^{l} \le 100 \times \gamma_1 \\
&\qquad \sum_{l=1}^{100} y_2^{l} \le 100 \times \gamma_2 \\
&\qquad x_j \ge 0, j = 1,2,3, \qquad y_1^{l}, y_2^{l} \in \{0,1\}, \forall l = 1,2,\dots,100
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

گام ۲. تابع هدف $\max \sum_{i=1}^{2} \gamma_i$ را به مجموعه توابع هدف مدل (۲۳) اضافه می‌کنیم.

گام ۳. کران پایین γ_i^{L} را برای هر γ_i مشخص می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $\gamma_1^{L} = 0/8$ و $\gamma_2^{L} = 0/65$ باشد.

گام ٤. به منظور دستیابی به چندین جواب پارتو، مدل (۲۳) را به ازای ۱۰ وزن مختلف حل می‌کنیم. واضح است که به ازای هر وزن، یک جواب پارتو از مدل (۲۳) به دست می‌آید که لزوماً متمایز از جواب‌های پارتوی دیگر نیستند.

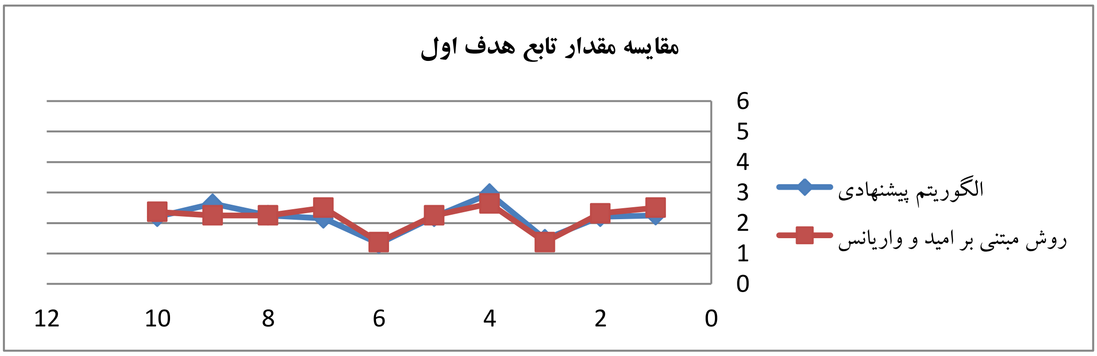
گام ٥. مدل برنامه‌ریزی چند هدفی عدد صحیح مختلط را با استفاده از روش مجموع وزین در نرم افزار Lingo حل می‌کنیم. نتایج به دست آمده از حل مدل در جدول ۲ آورده شده است.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

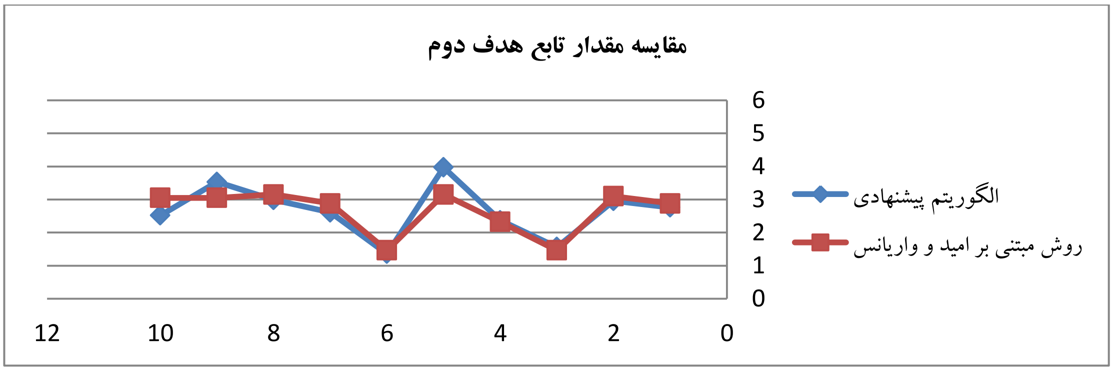
جدول ۲. نتایج به دست آمده از حل مدل به ازای ۱۰ وزن مختلف

$\sum_{i=1}^{2}\gamma_i$	$z^{(3)}$	$z^{(2)}$	$z^{(1)}$	(w_1,w_2,w_3,w_4)
۱/۹۴	۱/۳۲	۲/۷۶	۲/۲۵	(۰/۱,۰/۱,۰/۱,۰/۷)
۱/۵۱	۱/۲۹	۲/۹۶	۲/۲۰	(۰/۱,۰/۴,۰/۴,۰/۱)
۱/۸۱	۱/۴	۱/۵۶	۱/۴۷	(۰,۰,۰/۵,۰/۵)
۱/۴۵	۱/۹۶	۲/۳۷	۲/۹۶	(۱,۰,۰,۰)
۱/۴۵	۰/۹۹	۳/۹۷	۲/۲۰	(۰,۱,۰,۰)
۱/۴۵	۱/۵۲	۱/۳۶	۱/۳۲	(۰,۰,۱,۰)
۱/۹۹	۱/۴۶	۲/۶۱	۲/۱۵	(۰,۰,۰,۱)
۱/۷	۱/۱۵	۲/۹۹	۲/۲۵	(۰/۲۵,۰/۲۵,۰/۲۵,۰/۲۵)
۱/۵۲	۱/۲۵	۳/۵۳	۲/۶۳	(۰,۰/۵,۰,۰/۵)
۱/۷	۱/۰۹	۲/۵۲	۲/۲۰	(۰/۵,۰/۵,۰,۰)

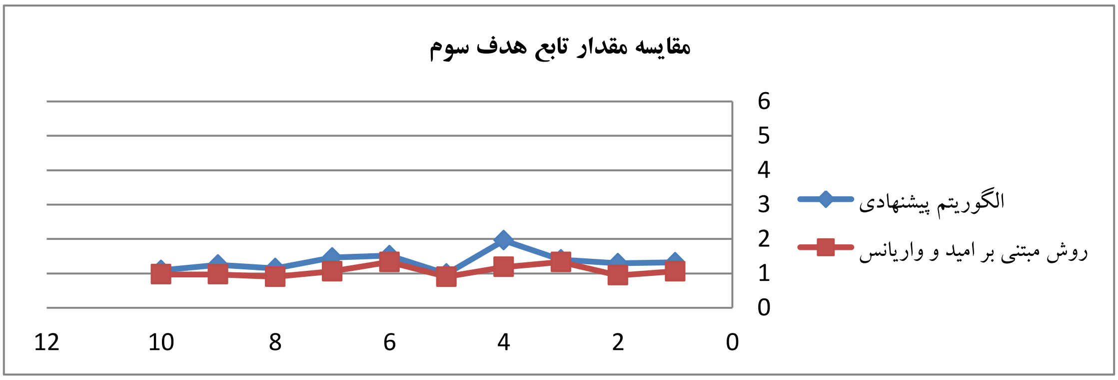
زمانی که تابع توزیع دقیقی از متغیرهای تصادفی مدل در دست باشد، استفاده از روش مبتنی بر امید و واریانس یک جواب دقیق از مدل را نتیجه می‌دهد. همان‌طور که قبلاً بیان کردیم، استفاده از روش تقریب میانگین نمونه یک روش مبتنی بر نمونه است و زمانی که تابع توزیع دقیقی از متغیرهای تصادفی مساله در دست نباشد، برای حل مدل تصادفی با محدودیت‌های شانسی به کار می‌آید. در واقع به جای استفاده از تابع توزیع دقیق از متغیرهای تصادفی، یک تابع توزیع تجربی براساس نمونه‌های به‌دست آمده از متغیرهای تصادفی مساله را در نظر می‌گیرد. بنابراین، الگوریتم پیشنهادی باید به گونه‌ای باشد که جواب به دست آمده از آن به جواب دقیق مساله نزدیک باشد. در اینجا، به منظور بررسی میزان نزدیک بودن جواب به‌دست آمده از الگوریتم پیشنهادی به مقدار دقیق آن، مدل (۱۵) به‌دست آمده از روش مبتنی بر امید و واریانس را به ازای همان ۱۰ وزن آورده شده در جدول ۲ و با روش مجموع وزین حل می‌کنیم. شکل‌های ۱ الی ۳ مقادیر پارتوی به دست آمده به ترتیب برای تابع هدف $z^{(1)}$، $z^{(2)}$ و $z^{(3)}$ را به دو روش الگوریتم پیشنهادی و روش مبتنی بر امید و واریانس مقایسه می‌کند.



شکل ۱. مقایسه مقادیر پارتوی تابع هدف $z^{(1)}$



شکل ۲. مقایسه مقادیر پارتوی تابع هدف $z^{(2)}$



شکل ۳. مقایسه مقادیر پارتوی تابع هدف $z^{(3)}$

همان‌طور که از شکل ۱ الی شکل ۳ مشاهده می‌شود، مقادیر به‌دست آمده به ازای هر سه تابع هدف بر اساس الگوریتم پیشنهادی نزدیک به جواب دقیق به‌دست آمده با استفاده از روش مبتنی بر امید و واریانس است. از آنجایی که در بسیاری از مسایل واقعی، تابع توزیع متغیرهای تصادفی در دسترس نیست بنابراین، روش پیشنهادی می‌تواند راه حل خوبی برای این گونه مسایل باشد چون به یک جواب نزدیک به جواب قطعی دست می‌یابد.

٦ نتیجه‌گیری و پیشنهادهای مطالعات آتی

این مطالعه به مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفی تصادفی با محدودیت‌های شانسی متمرکز شد و بر اساس مباحث نظری ارایه‌شده یک رویکرد جدید برای حل این گونه مدل‌ها مبتنی بر روش تقریب میانگین نمونه ارایه شد به طوری که ابتدا با استفاده از نمونه‌گیری، مدل برنامه‌ریزی تصادفی خطی چندهدفی با محدودیت‌های شانسی به یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفی قطعی غیرخطی تبدیل شده و سپس با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی عدد صحیح این مدل خطی‌سازی شده است. در روش پیشنهادی، به منظور افزایش احتمال برآورده شدن محدودیت‌های شانسی و در عین حال بهینه‌شدن اهداف مساله یک تابع هدف جدید به صورت $\max \sum_i \gamma_i$ برای بیشینه‌سازی حداقل مقدار احتمال برآورده شدن هر محدودیت شانسی یعنی γ_i به مجموعه اهداف مساله اضافه کردیم. همچنین، برای حذف مقادیر پایین γ_i، کران پایین γ_i^L را برای هر γ_i مشخص کردیم. به منظور حل مدل

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

چندهدفی به‌دست آمده از روش کلاسیک مجموع وزین استفاده کردیم و جواب‌های پارتوی مدل را به ازای ۱۰ وزن مختلف به دست آوردیم. لازم به یادآوری است که روش‌های کلاسیک از جمله روش مجموع وزین برای حل مدل‌های چندهدفی همواره جواب دقیق مدل را به دست می‌دهند اما زمانی که ابعاد مساله بزرگ باشد استفاده از روش‌های کلاسیک مقرون به صرفه نیست و حتی ممکن است بعد از گذشت مدت زمان زیاد از اجرای مدل، جواب دقیق مساله را نتیجه ندهد. در این صورت، استفاده از روش‌های فراابتکاری مانند NSGA-II و MOPSO برای حل مدل چندهدفی قطعی به دست آمده پیشنهاد می‌شود که یک جواب تقریبی نزدیک به جواب دقیق مساله را به دست می‌دهند. همچنین، روش ارایه شده برای متغیرهای تصادفی با هر توزیع احتمالی قابل حل است. علاوه بر این، در صورتی که توزیع احتمال دقیقی در دسترس نباشد، با استفاده از نمونه‌های در دسترس از متغیر تصادفی می‌توان از این روش برای حل مدل استفاده کرد.

قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب سپاس و قدردانی خود را از بیان نقطه نظرات اصلاحی داوران محترم اعلام می‌دارند. بی‌شک پیشنهادهای ارزشمند ایشان نقش به‌سزایی در بهبود کیفیت این تحقیق داشته است.

منابع

[۱۱] زرین پور، ن.، (۱۳۹۷). مساله چندهدفه مکان یابی تسهیلات ظرفیت دار با محدودیت شانس و ترجیحات مشتری و حل آن با الگوریتم‌های چند هدفه تکاملی. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۵۹ (۴)،۳۷–۶۰.

[۱۲] ناصری، س. هـ و باوندی، س.، (۱۳۹۶). ارایه مدلی برای حل مسایل برنامه ریزی تصادفی چندهدفه با استفاده از تابع عضویت هذلولوی. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۵۵ (۴)، ۲۱–۳۳.

[1] G. Klir and Y. Bo, (1995). Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, 4.
[2] K. Peter and Stein W. Wallace, (2003). Stochastic Programming.
[3] A. Shabbir and A. Shapiro, (2008). Solving chance-constrained stochastic programs via sampling and integer programming, Tutorials in Operations Research, 10, 261–270.
[4] N. S. Kambo, (1984). Mathematical Programming Technique.
[5] A. Charnes and W. Cooper, (1959). Chance constrained programming, Management Science, 6, 73–79.
[6] O. Elci, N. Noyan, and K. Bulbul, (2018). Chance-constrained stochastic programming under variable reliability levels with an application to humanitarian relief network design, Computers and operations research, 96, 91–107.
[7] C. Marino, M. Quddus, M. Marufuzzaman, M. Cowan, and A. E. Bednar, (2018). A chance-constrained two-stage stochastic programming model for reliable microgrid operations under power demand uncertainty, Sustainable Energy, Grids and Networks, 13, 66–77.
[8] P. Schütz, A. Tomasgard, and S. Ahmed, (2009). Supply chain design under uncertainty using sample average approximation and dual decomposition, European Journal of Operational Research, 409–419.
[9] T. Homem-de-Mello and B. Guzin, (2014). Monte Carlo Sampling-Based Methods for Stochastic Optimization, Surveys in Operations Research and Management Science, 19(1), 56–85.
[10] S. Khishtandar, (2019). Simulation based evolutionary algorithms for fuzzy chance-constrained biogas supply chain design, Applied Energy, 236, 183–195.
[13] R. Bilsel and A. Ravindran, (2011). A multiobjective chance constrained programming model for supplier selection under uncertainty, Transportation Research Part B: Methodological, 45(8), 1284–1300.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.5.5]

[14] M. Farina, L. Giulioni, and R. Scattolini, (2016). Stochastic linear Model Predictive Control with chance constraints – A review, Journal of Process Control, 44, 53–67.
[15] Y. Xie, Y. Li, G. . Huang, Y. Li, and L. Chen, (2011). An inexact chance-constrained programming model for water quality management in Binhai New Area of Tianjin, China, Science of The Total Environment, 409(10), 1757–1773.
[16] Y. Xu, G. Huang, X. Qin, and M. Cao, (2009). A stochastic robust chance-constrained programming model for municipal solid waste management under uncertainty," Resources, Conservation and Recycling, 53(6), 352–363.
[17] J. Birge and F. Louveaux, (2011). Introduction to Stochastic Programming.
[18] M. Ehrgott and M. M. Wiecek, (2005). Mutiobjective programming, in Multiple criteria Decision Analysis: State of the art surveys, Springer, 667–708.
[19] L. James and A. Shabbir, (2008). A Sample Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints, SIAM Journal on Optimization, 19(2), 674–699.
[20] S. Hulsurkar, M. P. Biswal, and S. B. Sinha, (1997). Fuzzy programming approach to multi-objective stochastic linear programming problems, Fuzzy Sets and Systems, 88(2),173–181.
[21] L. Ma and L. Ying, (2017). A Stochastic Chance Constrained Closed-Loop Supply Chain Network Design Model with VaR Criterion, Journal of Uncertain Systems, 11(4), 306–320.
[22] S. Krishnendu, I. Mohd, R. Shankar, and S. Y. Surendra, (2016). Low carbon chance constrained supply chain network design problem: A benders decomposition based approach, Computers & Industrial Engineering.
[23] B. . Pagnoncelli, S. Shapiro, and A. A, (2009). Sample Average Approximation Method for Chance Constrained Programming: Theory and Applications, Journal of Optimization Theory and Applications, 142, 399–416.
[24] M. C. Campi, S. Garatti, and M. Prandini, (2009). The scenario approach for systems and control design, Annual Reviews in Control, 33(2),149–157.
[25] L. James, A. Shabbir, and N. George, (2010). An integer programming approach for linear programs with probabilistic constraints, Mathematical programming, 122(2), 247–272.
[26] T. Homem-de-Mello and G. Bayraksan, (2014). Monte Carlo Sampling-Based Methods for Stochastic Optimization, Surveys in Operations Research and Management Science, 19(1), 56–85.
[27] I. P. Stanimirovic, M. L. Zlatanovic, and M. D. Petkovic, (2011). On the linear weighted sum method for multi-objective optimization, Facta Acta Universitatis, 26, 49–63.