مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره دوم (پیاپی ۶۵)، تابستان ۹۹، ص ص ۱۴۴-۱۲۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

رتبه‌بندی با روش کارایی متقاطع بهبودیافته با استفاده از مساله‌ی آشوب: کاربردی در بانک‌های تجاری ایران

لیلا خوش‌اندام[1*]
۱-استادیار، گروه ریاضی، واحد لشت نشا- زیباکنار، دانشگاه آزاد اسلامی، لشت نشا، ایران

رسید مقاله: ۱۰ تیر ۱۳۹۸
پذیرش مقاله: ۶ اردیبهشت ۱۳۹۹

چکیده

تحلیل کارایی سازمان‌ها یکی از مباحث مهم در حیطه‌ی بهینه‌سازی و تحقیق در عملیات می‌باشد. الگویابی یکی از روش‌های مؤثر برای انجام این مهم است و شاید بتوان یکی از مهم‌ترین ابزار الگویابی را روش تحلیل پوششی داده‌ها دانست که در سه دهه‌ی اخیر توجه محققین را به خود جلب کرده است. کارایی متقاطع یکی از روش‌های رتبه‌بندی در تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها است که متأسفانه به دلیل وجود جواب‌های بهینه‌ی چندگانه در فرم مضربی مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها رتبه‌بندی منحصربه فردی از واحدها ایجاد نمی‌کند تاکنون برای رفع این مشکل از اهداف ثانویه استفاده می‌شد. در این مقاله با استفاده از مساله‌ی آشوب و ارتباط بین مسایل برنامه‌ریزی خطی پرایمال و دوآل، مدلی جدید پیشنهاد شده است به طوری که وزن‌های به‌دست آمده از این مدل و به دنبال آن رتبه‌بندی حاصل از روش کارایی متقاطع به صورت منحصربه فرد خواهند بود. نتایج حاصل از روش پیشنهادی بر روی داده‌های واقعی برگرفته از شعب بانکی در ایران مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی متقاطع، برنامه‌ریزی خطی، ورودی/ خروجی.

۱ مقدمه

نخستین بار چارنز و همکاران [۱]، تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها را از روی نظریه‌ی فارل [۲] برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که چندین ورودی را برای تولید چندین خروجی مصرف می‌کنند، ارایه نمودند. بنکر و همکاران در سال ۱۹۸۴ [۳] روش چارنز و همکاران را به حالت بازده به مقیاس متغیر تعمیم دادند. DEA به هر واحد کارا اندازه‌ی کارایی یک و به هر واحد ناکارا اندازه‌ی کارایی کوچک‌تر از یک را نسبت می‌دهد. از آنجایی که ماهیت خودارزیابی در DEA اجازه می‌دهد که هر واحد، کارایی خود را در مطلوب‌ترین وزن خود ارزیابی کند، اغلب بیشتر از یک DMU به عنوان واحد کارا ارزیابی می‌شود و DEA

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: L.khoshandam.lziau.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

قادر به ایجاد تمایز بیشتر بین این گونه واحدها نمی‌باشد (وانگ و چاین [۴]). این عدم تمایز واحدهای کارا همواره مورد انتقاد بوده است. بنابراین رتبه‌بندی و بالا بردن قدرت تمایز بین واحدهای کارا موضوعی مورد بحث برای محققین می‌باشد. اندرسون و پترسون [۵] از اولین افرادی بودند که با ارایه‌ی مدل‌های ابرکارایی در این حیطه به مطالعه پرداختند. برخلاف تحلیل پوششی داده‌های استاندارد که رتبه‌ی کارایی در آن نباید بیشتر از یک باشد، در مدل‌های ابرکارایی، نمرات کارایی واحدهای کارا، بزرگ‌تر از یک درنظر گرفته می‌شود و به این طریق تمایز مناسبی بین واحدهای کارا ایجاد می‌شود. از مطالعات صورت پذیرفته در این زمینه می‌توان به مقالات ترال [۶]، دولا و هیکمن[۷]، سویوشی[۸]، چن [۹]، چن و همکاران[۱۰]، بنکر و همکاران [۱۱]، آقایی و همکاران [۱۲] اشاره نمود.

سکستون و همکاران [۱۳]، برای اولین بار روش کارایی متقاطع را به منظور رتبه‌بندی واحدهای کارا ارایه نمودند. دیدگاه آن‌ها در این ارزیابی تغییر دیدگاه خود ارزیاب به ارزیابی رقیب گونه بوده است. در این روش یک بار اندازه‌ی کارایی یک واحد با استفاده از مطلوب‌ترین وزن خودش و $n-1$ بار دیگر توسط مطلوب‌ترین وزن‌های $n-1$ واحد باقی‌مانده ارزیابی می‌شود و سپس میانگین n کارایی به‌دست آمده، اندازه‌ی کارایی متقاطع را تعیین می‌کند. کارایی متقاطع دارای دو مزیت اصلی می‌باشد: (۱) رتبه‌بندی واحدی فراهم می‌کند. (۲) الگوی وزنی نامتناسب را حذف می‌نماید (اندرسون و همکاران [۱۴]). اگرچه کارایی متقاطع به طور گسترده‌ای در کاربردها استفاده می‌شود ولی دارای نقاط ضعفی است. از آنجایی که وزن‌های محاسبه‌شده از طریق مدل‌های استاندارد DEA منحصربه فرد نیستند، انتخاب مختلف از وزن‌های بهینه، رتبه‌های متفاوتی را از طریق کارایی متقاطع تولید می‌کند. در نتیجه به میزان بالایی اعمال نظر از طریق نرم افزار صورت می‌گیرد (دسپاتیس [۱۵]). دویل و گرین [۱۶] بیان کردند که به دلیل وجود چندگانگی وزن‌ها، رتبه‌ی حاصل از روش کارایی متقاطع نمی‌تواند یک رتبه‌بندی منحصربه فرد باشد و لذا ایشان اهداف ثانویه را به صورت مدل‌های خوشبینانه و بدبینانه پیشنهاد نمودند که به ترتیب در مدل خوشبینانه علاوه بر بیشینه کردن کارایی واحد تحت ارزیابی، میانگین کارایی واحدهای دیگر بیشینه می‌شود و در مدل بدبینانه علاوه بر کمینه‌کردن کارایی واحد تحت ارزیابی میانگین کارایی واحدهای دیگر بیشینه می‌گردد. وو و همکاران [۱۷] و کانتراس [۱۸] و رومن و همکاران [۱۹] نیز از اهداف ثانویه برای رتبه‌بندی واحدهای کارا استفاده نمودند. جهانشاهلو و همکاران [۲۰] اهداف ثانویه را به شکل انتخاب وزن‌های متقارن برای این منظور به کار بردند. وو و همکاران [۲۱]، مدلی به نام مدل تعادل وزنی معرفی کردند که هدف این مدل کاهش تفاوت‌های فاحش بین داده‌های وزنی و کاهش تعداد وزن های صفر بود. لیانگ و همکاران [۲۲]با تعمیمی بر مدل دویل و گرین، مدل‌هایی را با سه تابع هدف ثانویه‌ی متفاوت ارایه نمودند. هر تابع هدف ثانویه موجود در این مقالات معیار ارزیابی کارایی جدیدی می‌باشد که می‌تواند در زمینه‌های کاربردی متفاوت استفاده شود. وانگ و چاین [۲۳] کارایی متقاطع را توسط مدلی با مجموعه‌ی وزن‌های متفاوت از ورودی‌ها و خروجی‌ها پیشنهاد کردند و آن را مدل بی‌طرف نام نهادند. رویز و سیرونت [۲۴] استفاده از میانگین وزنی از کارایی متقاطع به جای میانگین حسابی را در محاسبه‌ی کارایی متقاطع پیشنهاد کردند. وانگ و همکاران [۲۵] نیز روش کارایی متقاطع را با استفاده از وزن‌های متعادل ارایه کردند. وو و همکاران [۲۶] مطالعه‌ای بر

روی بهبود کارایی متقاطع انجام دادند. ایشان بیان کردند که اندازه‌ی کارایی متقاطع کلاسیک ممکن است اعتبار لازم را نداشته باشد زیرا بر مبنای جواب‌های بهینه‌ی پارتو بنا نهاده نشده است لذا یک روش کارایی متقاطع پارتو معرفی کردند. کوک و ژو [۲۷] برای این منظور مدلی مضربی و پایا نسبت به واحد را معرفی کردند. امیرتیموری و همکاران [۲۸] نیز دو تابع هدف ثانویه‌ی متفاوت ارایه کردند که توسط آنها یک الگوی وزنی مناسب برای محاسبه‌ی ارزیابی برشی و رتبه‌بندی واحدها انجام پذیرفت. از دیگر مطالعات انجام گرفته در رابطه با روش کارایی متقاطع می‌توان کارهای ارزشمند محققینی چون گرین و همکاران [۲۹]، یو و همکاران [۳۰]، دیو و همکاران [۳۱]، لیم و همکاران [۳۲]، دوتولی و همکاران [۳۳]، شانگ و سویوشی [۳۴]، اترای و ران [۳۵]، ماکرو و همکاران [۳۶] را نام برد.

تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها به دلیل توانایی در تشخیص واحدهای کارا و همچنین تعیین مرز تولید، در کاربردهای بسیاری از جمله ارزیابی عملکرد واحدهایی نظیر بیمارستان‌ها، مدارس، دانشگاه‌ها، بانک‌ها و ... به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. (چارنز و همکاران [۳۷]). مطالعات بیشماری در زمینه‌ی صنعت بانکداری صورت گرفته است، از آن جمله مقالات شرمن و گلد [۳۸]، فوکویام [۳۹]، آساف و همکاران [۴۰]، موخرجی [۴۱]، نو و لی [۴۲]، هولود و لویس [۴۳]، گولاتی و کومار [۴۴] و سوفیان [۴۵]، پاسی اوراس [۴۶]، لو [۴۷] ، الهویرنلو و واعظ [۴۸] ... می‌باشد.

در تمام مطالعات انجام پذیرفته، همواره در گام اول از مدل‌های استاندارد DEA برای به‌دست آوردن وزن‌های اولیه برای محاسبه‌ی کارایی متقاطع استفاده شده است. این وزن‌ها در گام بعدی که به عنوان اهداف ثانویه یا گام دوم نامیده می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرند تا رتبه‌بندی کاملی روی DMUها صورت گیرد. مهم‌ترین نکته‌ای که در این فرایند ایجاد اشکال اساسی می‌نماید این است که به دلیل وجود جواب‌های بهینه‌ی چندگانه در گام اول، رتبه‌بندی صورت گرفته منحصربه‌فرد نخواهد بود و انتخاب هر جواب دگرین ممکن است منجر به رتبه‌بندی متفاوتی شود. این چندگانگی در جواب، بزرگ‌ترین مشکل رتبه‌بندی به روش کارایی متقاطع است. لذا چنانچه بتوان از گام اول وزن‌های منحصربه فردی استخراج کرد به نظر می‌رسد این مشکل برطرف خواهد شد. در این مطالعه با استفاده از مساله‌ی آشوب و ارتباط بین جواب‌های بهینه‌ی مسایل برنامه‌ریزی خطی پریمال و دوآل، به جواب بهینه‌ی منحصربه فردی از مساله‌ی گام اول می‌رسیم و از این رو در ادامه مشکل چندگانگی وزن‌ها برطرف‌شده و به دنبال آن رتبه‌بندی حاصل از روش کارایی متقاطع بهبود می‌یابد. پس از طراحی فرایند رتبه‌بندی با استفاده از کارایی متقاطع بهبودیافته، آن را روی داده‌های یکی از بانک‌های تجاری ایران پیاده خواهیم نمود و نتایج مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. بخش‌های مقاله به این صورت مرتب شده است: در بخش بعدی به مرور برخی از مدل‌های استاندارد که در ادامه از آنها استفاده می‌شود خواهیم پرداخت. در بخش سوم، کارایی متقاطع را معرفی خواهیم کرد. در بخش چهارم ابتدا به مروری بر بعضی از مسایل و قضایای مربوط به مسایل پرایمال و دوال و همچنین مساله‌ی آشوب خواهیم پرداخت و سپس به دنبال آن روش پیشنهادی معرفی خواهد شد. در بخش پنجم و ششم به منظور صحت و سقم کارکرد روش پیشنهادی، این روش ابتدا بر

روی مثالی کوچک از ۵ واحد تصمیم‌گیرنده و سپس بر روی داده‌هایی واقعی از ۲۰ شعبه‌ی بانکی در ایران اجرا و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است و در نهایت در بخش هفتم به نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

۲ برخی از مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنیم مجموعه‌ای از n واحد تصمیم‌گیری جهت ارزیابی وجود دارند. هر $\mathrm{DMU_j}\ (j=1,...,n)$، s خروجی متفاوت را به کمک m ورودی متفاوت تولید می‌کند. مقایر iامین ورودی و rامین خروجی $\mathrm{DMU_j}\ (j=1,...,n)$ به ترتیب با $x_{ij}\ (i=1,...,m)$ و $y_{rj}\ (r=1,...,s)$ نشان داده می‌شوند. همچنین فرض کنیم $X_j=(x_{1j},...,x_{mj})$ و $X_j \geq 0$ و $X_j \neq 0$ و $Y_j=(y_{1j},...,y_{mj})$ و $Y_j \geq 0$ و $Y_j \neq 0$. مجموعه‌ی امکان تولید (PPS) مدل CCR به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{CCR}=\left\{(X,Y)\middle| X \geq \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \quad , \quad Y \leq \sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j \quad j=1,...n\right\} \tag{1}$$

مدل ورودی محور CCR با درنظر گرفتن $\mathrm{DMU_p}$ تحت عنوان واحد تحت ارزیابی در مدل (۲) آورده شده است.

$$\begin{aligned} & Min \quad E \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \leq E x_{ip}, \qquad i=1,...,m \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{ij} \geq y_{rp}, \qquad r=1,...,s \\ & \qquad \lambda_j \geq 0 \qquad\qquad\quad j=1,...,n. \end{aligned} \tag{2}$$

مدل (۲) یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی می‌باشد و موسوم به مدل CCR پوششی در ماهیت ورودی است. اگر جواب‌های بهینه این مدل را با (E^*,λ^*) نشان دهیم، مقدار E^* میزان کارایی تکنیکی[1] واحد تحت بررسی را مشخص می‌کند و همواره بین صفر و یک است.

دوآل مدل پوششی CCR در ماهیت ورودی که مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی می‌نامند به صورت زیر تعریف می‌شود و برای هر DMUی تحت ارزیابی میزان کارآیی، E^*_{pp}، به‌دست آمده ازآن به وسیله مساله‌ی بهینه‌سازی زیر به دست می‌آید:

[1] Technical Efficiency

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

$$E_{pp}^{*} = Max \quad E_{pp} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rp} y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ip} x_{ip}}$$

$$s.t \qquad E_{pj} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rp} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ip} x_{ij}} \leq 1, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{۳}$$

$$u_{rp} \geq 0 \quad , \quad v_{ip} \geq 0, \qquad for \;\; all \;\; i, j$$

که در آن $v_p = (v_{1p},\ldots,v_{mp}) \in \mathbb{R}_m^+$ و $u_p = (u_{1p},\ldots,u_{sp}) \in \mathbb{R}_s^+$ به ترتیب بردارهای اوزان مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشند. با حل مدل (۳) برای هر DMU_p، یک مجموعه از اوزان بهینه‌ی $\left(v_p^*, u_p^*\right)$ و همچنین امتیاز کارایی E_{pp}^{*} به دست می‌آیند.

همان‌طور که در مقدمه نیز بیان شد، روش‌های زیادی برای رتبه‌بندی و تفکیک و تمایز بین واحدهای کارا ارایه شده است که هرکدام دارای مزایا و معایبی هستند. در بخش بعد به پرکاربردترین روش رتبه‌بندی، ارزیابی کارایی متقاطع و معایب آن خواهیم پرداخت.

۳ کارایی متقاطع

کارایی متقاطع به صورت یک فرایند دو مرحله‌ای انجام می‌شود، در مرحله اول با استفاده از یکی از مدل‌های استاندارد DEA مانند مدل مضربی CCR، برای هر DMUی تحت ارزیابی یک بردار وزنی و همچنین میزان کارایی CCR، E_{pp}^{*}، محاسبه می‌گردد. با فرض اینکه $v_p^* = (v_{1p}^*,\ldots,v_{mp}^*) \in \mathbb{R}_m^+$ و $u_p^* = (u_{1p}^*,\ldots,u_{sp}^*) \in \mathbb{R}_s^+$ جواب‌های بهینه برای DMU_p حاصل از مدل (۳) باشند، کارایی متقاطع $DMU_j \; (j=1,\ldots,n)$ بر طبق اوزن بهینه DMU_p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{pj} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rp}^{*} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ip}^{*} x_{ij}}, \quad (p\,,\, j = 1,\ldots,n) \tag{۴}$$

این کارایی‌ها به عنوان ماتریس کارایی متقاطع در جدول ۱ آورده شده است.

در مرحله‌ی دوم، عملکرد کلی $DMU_j \; (j=1,\ldots,n)$، میانگین تمام E_{pj}ها $(j=1,\ldots,n)$ به عنوان میزان کارایی متقاطع معرفی می‌شود. بنابراین با انجام این مراحل، اندازه‌ی کارایی متقاطع برای تمام DMUها، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{E}_j = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} E_{pj} \qquad (j \neq p\,,\, j = 1,\ldots,n) \tag{۵}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

اکنون اندازه‌ی $\bar{E}_j$، که میانگین سطری ماتریس کارایی متقاطع است، به عنوان معیاری برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول ۱. ماتریس کارایی متقاطع و اندازه‌ی آن

DMU_p	۱	۲	…	n	میانگین کارایی متقاطع
۱	E^*_{11}	E_{12}	…	E_{1n}	$\bar{E}_1 = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} E_{1j}$
۲	E_{21}	E^*_{22}	…	E_{2n}	$\bar{E}_2 = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} E_{2j}$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
n	E_{n1}	E_{n2}	…	E^*_{nn}	$\bar{E}_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} E_{nj}$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این میزان وابسته به وزن‌های بهینه‌ی DMU_p تغییر خواهد کرد. به دلیل وجود جواب بهینه‌ی دگرین در جواب حاصل از مدل (۳)، وزن‌های حاصل و به دنبال آن ماتریس ساخته شده به شیوه‌ی فوق منحصربه فرد نیست. برای برطرف کردن این مشکل، روش‌هایی پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان از روش اهداف ثانویه نام برد که برای اولین بار توسط سکستون و همکاران [۱۲] و دویل و گرین [۱۵] ارایه گردید. روش‌های ارایه شده تا به امروز به طور پایه‌ای مشکل چندگانگی رتبه‌بندی حاصل از کارایی متقاطع را برطرف نمی‌نمایند و در تمامی آنها از وزن‌های بهینه‌ی فرم مضربی CCR استفاده می‌شود و از این رو هر بار با هر جواب شدنی یک الگوی رتبه‌بندی تعیین می‌شود. لذا این‌که کدام روش رتبه‌بندی با کدام وزن مورد استفاده قرار گیرد یکی از مشکلات تمام روش‌های مبتنی بر کارایی متقاطع است. از این رو در بخش بعدی در صدد هستیم از فرم مضربی مدل‌های پایه‌ای DEA، جواب‌های منحصربه‌فردی استخراج کنیم. این وزن‌های منحصربه فرد می‌تواند در تمام اهداف ثانویه‌ی بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

٤ کارایی متقاطع بهبود یافته

قبل از پرداختن به موضوع، ابتدا به یکی از مباحث مهم و اساسی در برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم که درواقع ارتباط بین مسایل پرایمال و دوآل را نشان می‌دهد. سپس از این ارتباط و مساله‌ی آشوب بهره جسته و در به دست آوردن وزن‌های منحصربه فرد در مدل‌های مضربی از آنها استفاده می‌کنیم.

٤-١ ارتباط بین جواب‌های بهینه مسایل P و D

مسایل برنامه‌ریزی خطی پرایمال (P) و دوآل (D) را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{llll} P: & \text{Min } Z = cx & D: & \text{Max } W = wb \\ & \text{s.t. } Ax \ge b & & \text{s.t. } wA \le c \\ & \quad x \ge 0 & & \quad w \ge 0 \end{array}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

که در آن A ماتریسی $m \times n$ است و $Rank(A) = m < n$.

لم ۱ اگر مساله‌ی D دارای جواب بهینه‌ی دگرین باشد و x^* جواب اساسی شدنی بهینه‌ی مساله‌ی P باشد آنگاه x^* باید تبهگن باشد.

برهان: مرجع [۴۷] را ببینید.

بنابراین اگر تباهیدگی در مساله‌ی P را برطرف نماییم، مساله‌ی D دارای جواب بهینه‌ی منحصربه فرد خواهد بود. از نظر هندسی می‌دانیم که در حالت تبهگنی مساله‌ی (P)، بردار b به زیرفضای $(m-1)$ بعدی از ستون‌های ماتریس ضرایب A تعلق دارد. برای رهایی از تبهگنی کافی است بردار b را از زیرفضاهای ذکر شده خارج نماییم. این عمل را آشوب نمودن می‌نامیم. که به معنی حرکت دادن مختصر بردار b از وضعیت کنونی به وضعیتی است که از فضای مورد نظر خارج شود. برای این منظور قرار می‌دهیم:

$$b(\varepsilon) = b + (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m)^t \qquad (6)$$

که در آن ε عدد مثبت بسیار کوچکی است و $\varepsilon^r = \varepsilon \times \varepsilon \times \cdots \times \varepsilon$.

قضیه ۱ برای هر بردار $b \in R^m$ عدد مثبتی مانند ε_1 وجود دارد به طوری که به ازای هر ε، $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$، مساله‌ی (۳) غیرتبهگن می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ s.t. \quad & Ax = b(\varepsilon) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

برهان: مرجع [۴۹] را ببینید.

۲-٤ منحصربه‌فرد کردن وزن در مدل‌های مضربی

با توجه به اینکه فرم مضربی CCR همواره جواب‌های بهینه‌ی دگرین دارد بنابراین ماتریس کارایی متقاطع منحصربه فرد نیست. تمام روش‌های موجود تا به امروز از اهداف ثانویه استفاده کرده‌اند و چون ماتریس اولیه از حالت چندگانگی خارج نمی‌شود لذا هنوز مشکل جواب‌های دگرین و به تبع آن عدم یکتایی رتبه‌بندی باقی است.

از آنجایی که فرم مضربی CCR همواره جواب بهینه‌ی دگرین دارد لذا بنابر لم ۱، فرم پوششی آن همواره باید جواب بهینه‌ی تبهگن داشته باشد. بنابراین می‌توان با استفاده از عکس نقیض لم ۱، نشان داد که اگر فرم پوششی CCR جواب غیرتبهگن داشته باشد آنگاه فرم مضربی آن جواب بهینه‌ی منحصربه فرد خواهد داشت. بنابراین با استفاده از مساله‌ی آشوب و بر طبق قضایای ذکر شده، فرم پوششی CCR را به صورت زیر در پیشنهاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (P) \quad & Min \quad \theta \\ & s.t. \\ & -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + \theta x_{ip} \geq \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} + \varepsilon, \qquad r = 1, \ldots, s \\ & \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (8)$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

دوآل مدل (۸) که همان فرم مضربی CCR است به صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&(D)\quad Max \quad \varepsilon\sum_{i=1}^{m} v_i + \varepsilon\sum_{r=1}^{s} u_r + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp} \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} v_r x_{ip} = 1 \\
&\quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \qquad j = 1,\dots,n, \\
&\quad u_r \ge 0 \qquad r = 1,\dots,s, \\
&\quad v_i \ge 0 \qquad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

قضیه ۲ جواب بهینه‌ی مدل (۹) منحصربه فرد است.

برهان: بر طبق قضایای ذکر شده اثبات بدیهی می‌باشد.

حال در روند دومرحله‌ای محاسبه‌ی کارایی متقاطع، اگر در گام اول برای به‌دست آوردن وزن‌های ورودی و خروجی از مدل (۹) استفاده کنیم، از آنجایی که وزن‌های حاصل از این مدل منحصربه فرد است لذا ماتریس کارایی متقاطعی که با استفاده از این اوزان در گام دوم ساخته می‌شود نیز منحصربه فرد خواهد بود. با این روش رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده به صورت یکتا به دست خواهد آمد. در بخش‌های بعد با ارایه‌ی یک مثالی عددی و یک مثال کاربردی عملکرد روش پیشنهادی را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

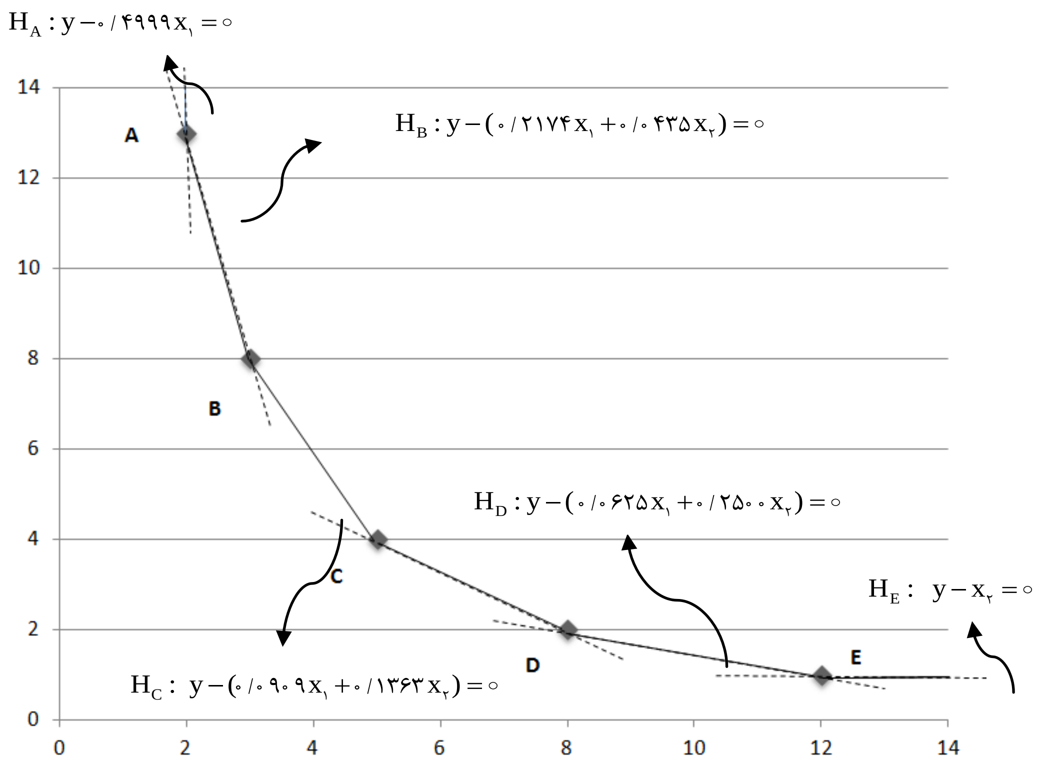
۵ مثال عددی

برای توصیف فرایند محاسباتی روش معرفی‌شده، آن را روی یک مجموعه از داده‌ها شامل ۵ واحد تصمیم‌گیری با دو ورودی و یک خروجی اجرا می‌کنیم. داده‌های ورودی و خروجی و همچنین مرز فارل حاصل از این واحدها به ترتیب در جدول ۲ و شکل ۱ آورده شده است. به عنوان مثال DMU_C را در نظر می‌گیریم. وزن‌های بهینه‌ی DMU_C، حاصل از حل فرم مضربی CCR، ضرایب هر یک از پاره‌خط‌های گذرنده از DMU_C، یعنی BC و CD و تمام پاره‌خط‌های حاصل از ترکیب خطی نامنفی این دو پاره‌خط می‌باشد و چندگانگی جواب کاملاً مشهود است. لذا هر بار که یک جواب بهینه انتخاب شود، یک ماتریس کارایی متقاطع و متعاقب آن یک رتبه‌بندی ایجاد می‌شود. (صرف‌نظر از اهداف ثانویه‌ای که تعریف خواهد شد.) بنابراین کارایی متقاطع حاصل از این وزن‌ها نمی‌تواند یک رتبه‌ی منحصربه‌فرد از واحدها ارایه دهد. با حل مدل CCR توسط نرم افزار GAMS، از بین تمام جواب‌های موجود برای DMU_C ضرایب پاره‌خط $BC:\ y-(0/1428x_1+0/0714x_2)=0$ داده شده است. سطرهای دوم، سوم و چهارم جدول ۳ وزن‌های بهینه‌ی واحدهای تصمیم‌گیرنده، سطر پنجم اندازه‌ی کارایی CCR و ششمین سطر نمایان‌گر اندازه‌ی کارایی متقاطع می‌باشد. آخرین سطر از این جدول، رتبه‌بندی حاصل از این روش را نشان می‌دهد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

جدول۲. مقادیر ورودی‌ها و خروجی

DMU	A	B	C	D	E
X_1	۲	۳	۵	۸	۱۲
X_2	۱۳	۸	۴	۲	۱
Y	۱	۱	۱	۱	۱



شکل۱. مرز فارل و ابرصفحه‌های گذرنده از واحدهای تصمیم‌گیرنده در مثال عددی

جدول۳. وزن‌های بهینه، کارایی CCR، کارایی متقاطع، رتبه‌بندی حاصل از آن

DMU	A	B	C	D	E
u_1	۱	۱	۱	۱	۱
v_1	۰/۴۹۹۹	۰/۲۱۷۴	۰/۱۴۲۸	۰/۰۹۰۹	۰/۰۶۲۵
v_2	۰	۰/۰۴۳۵	۰/۰۷۱۴۳	۰/۱۳۶۳۶	۰/۲۵۰۰
کارایی (CCR)	۱	۱	۱	۱	۱
کارایی متقاطع	۰/۷۲۶۳	۰/۷۷۱۴	۰/۷۹۱۰	۰/۷۱۵۱	۰/۵۸۳۷
رتبه‌بندی (کارایی متقاطع)	۳	۲	۱	۴	۵

ماتریس کارایی متقاطع حاصل از وزن‌های بهینه‌ی مدل CCR به صورت زیر است:

$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{bmatrix}
۱ & ۱ & ۰/۸۲۳۳ & ۰/۵۱۱۶ & ۰/۲۹۶۳ \\
۰/۶۶۶۶ & ۱ & ۱ & ۰/۷۳۳۳ & ۰/۴۵۷۱ \\
۰/۴۰۰۰ & ۰/۷۹۳۱ & ۱ & ۱ & ۰/۷۶۱۹ \\
۰/۲۵۰۰ & ۰/۵۴۷۶ & ۰/۷۷۷۷ & ۱ & ۱ \\
۰/۱۶۶۶ & ۰/۳۷۷۰ & ۰/۵۶۰۰ & ۰/۸۱۴۸ & ۱
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

حال فرایند بهبودیافته‌ی محاسبه‌ی کارایی متقاطع را بر روی این واحدهای تصمیم‌گیرنده اجرا می‌کنیم. همان‌طور که در بخش ۴ بیان شد، جواب‌های بهینه‌ی حاصل از حل مدل (۱۰) منحصربه فرد می‌باشد لذا وزن‌های بهینه‌ی حاصل از حل این مدل که در سطرهای دوم تا چهارم جدول ۴ آورده شده نیز وزن‌های یکتایی می‌باشند. سطر پنجم این جدول نمایان‌گر اندازه‌ی کارایی به‌دست آمده از مدل (۱۰) است. اگر DMUC را در نظر بگیریم وزن‌های بهینه‌ی این واحد، ضرایب پاره خط $DC:\ y-(۰/۰۹۰۹x_۱+۰/۱۳۶۴x_۲)=۰$ هستند و از آنجایی که این وزن‌ها منحصر به فرد هستند لذا رتبه‌بندی حاصل از آنها نیز منحصربه فرد خواهد بود. ضرایب بهینه‌ی بقیه‌ی واحدها در شکل ۱ به صورت خط‌چین نمایش داده شده است. همچنین کارایی متقاطع و رتبه‌بندی حاصل از فرآیند بهبودیافته به ترتیب در سطرهای ششم و هفتم جدول ۴ آورده شده است.

جدول ٤. وزن‌های بهینه‌ی بهبودیافته، کارایی بهبودیافته، کارایی متقاطع، رتبه‌بندی حاصل از آن

DMU	A	B	C	D	E
$u_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$v_۱$	۰/۴۹۹۹	۰/۲۱۷۴	۰/۰۹۰۹	۰/۰۶۲۵	۰
$v_۲$	۰	۰/۰۴۳۵	۰/۱۳۶۴	۰/۲۵۰۰	۱
کارایی (CCR-آشفته)	۱	۱	۱	۱	۱
کارایی متقاطع	۰/۵۷۷۰	۰/۵۹۶۴	۰/۶۴۱۰	۰/۶۵۹۵	۰/۶۷۱۷
رتبه‌بندی	۵	۴	۳	۲	۱

ماتریس کارایی متقاطع حاصل از وزن‌های بهینه‌ی مدل CCR بهبودیافته

$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{bmatrix}
۱ & ۱ & ۰/۵۱۱۶ & ۰/۲۹۶۳ & ۰/۰۷۶۹ \\
۰/۶۶۶۶ & ۱ & ۰/۷۳۳۳ & ۰/۴۵۷۱ & ۰/۱۲۵۰ \\
۰/۴۰۰۰ & ۰/۷۹۳۱ & ۱ & ۰/۷۶۱۹ & ۰/۲۵۰۰ \\
۰/۲۵۰۰ & ۰/۵۴۷۶ & ۱ & ۱ & ۰/۵۰۰۰ \\
۰/۱۶۶۶ & ۰/۳۷۷۰ & ۰/۸۱۴۸ & ۱ & ۱
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

همان‌طور که از جداول ۳ و ۴ قابل مشاهده است رتبه‌ی DMUC به روش کارایی متقاطع ۱ به‌دست آمده است که می‌تواند با تغییر جواب بهینه‌ی مدل مضربی CCR نیز تغییر نماید اما وقتی فرایند اصلاح شده‌ی کارایی متقاطع را پیاده‌سازی می‌کنیم رتبه‌ی DMUC از بین ۵ واحد موجود برابر با ۳ خواهد بود که بنابر قضایای ذکر شده این یک رتبه‌ی یکتا می‌باشد.

٦ یک کاربرد واقعی در بانک‌ها

در این بخش به منظور ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، آن را بر روی داده‌های واقعی ۲۰ شعبه‌ی بانکی در ایران برگرفته از مقاله‌ی امیرتیموری و کردرستمی [۵۰] که دارای ۳ ورودی و ۳ خروجی می‌باشد اجرا می‌کنیم.

ورودی‌ها شامل کارمندان، پایانه‌های کامپیوتر و مساحت شعبه (مترمربع) و خروجی‌ها شامل مقدار سپرده‌ها، مبالغ وام‌ها و میزان کارمزد می‌باشند. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها در جدول ۵ آورده شده است. (برای جلوگیری از پراکندگی داده‌ها و با توجه به پایایی مدل CCR به تغییر واحد، تمام شاخص‌ها نرمال شده‌اند.) برای مقایسه‌ی دقیق‌تر، داده‌های به‌دست آمده از این شعب ابتدا توسط روش کارایی متقاطع معمولی و سپس توسط روش کارایی متقاطع بهبودیافته رتبه‌بندی می‌گردند. میزان کارایی و وزن های بهینه‌ی حاصل از حل مدل مضربی CCR، در جدول ۶ نشان داده شده است.

ماتریس کارایی متقاطع معمولی در جدول ۷ ارایه شده است. ستون‌های بیست و دوم و بیست و سوم این جدول به ترتیب میزان کارایی متقاطع و رتبه‌بندی به‌دست آمده از این روش می‌باشند. همچنین در ستون‌های دوم تا هفتم جدول ۸ وزن‌های بهینه‌ی حاصل از حل مدل (۹) و در ستون هشتم، میزان کارایی به‌دست آمده از این مدل گنجانده شده است.

جدول۵. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها

شعب	کارمند	پایانه‌های کامپیوتر	مساحت	سپرده‌ها	وام ها	کارمزد
۱	۰/۹۵۰۳	۰/۷۰	۰/۱۵۵۰	۰/۱۹۰۰	۰/۵۲۱۴	۰/۲۹۲۶
۲	۰/۷۹۶۲	۰/۶۰	۱/۰۰۰۰	۰/۲۲۶۶	۰/۶۲۷۴	۰/۴۶۲۴
۳	۰/۷۹۸۲	۰/۷۵	۰/۵۱۲۵	۰/۲۲۸۳	۰/۹۷۰۳	۰/۲۶۰۶
۴	۰/۸۶۵۱	۰/۵۵	۰/۲۱۰۰	۰/۱۹۲۷	۰/۶۳۲۴	۱/۰۰۰۰
۵	۰/۸۱۵۱	۰/۸۵	۰/۲۶۷۵	۰/۲۳۳۳	۰/۷۲۲۱	۰/۲۴۶۳
۶	۰/۸۴۱۶	۰/۶۵	۰/۵۰۰۰	۰/۲۰۶۹	۰/۶۰۲۵	۰/۵۶۸۹
۷	۰/۷۱۸۹	۰/۶۰	۰/۳۵۰۰	۰/۱۸۲۴	۰/۹۰۰۰	۰/۷۱۵۸
۸	۰/۷۸۵۳	۰/۷۵	۰/۱۲۰۰	۰/۱۲۵۰	۰/۲۳۴۰	۰/۲۹۷۷
۹	۰/۴۷۵۶	۰/۶۰	۰/۱۳۵۰	۰/۰۸۰۱	۰/۳۶۴۳	۰/۲۴۳۹
۱۰	۰/۶۷۸۲	۰/۵۵	۰/۵۱۰۰	۰/۰۸۱۸	۰/۱۸۳۵	۰/۰۴۸۶
۱۱	۰/۷۱۱۲	۱/۰۰	۰/۳۰۵۰	۰/۲۱۱۷	۰/۳۱۷۹	۰/۴۰۳۱
۱۲	۰/۸۱۱۳	۰/۶۵	۰/۲۵۵۰	۰/۱۲۲۷	۰/۹۲۲۵	۰/۶۲۷۹
۱۳	۰/۶۵۸۶	۰/۸۵	۰/۳۴۰۰	۰/۱۷۵۵	۰/۶۴۵۲	۰/۲۶۰۵
۱۴	۰/۹۷۶۳	۰/۸۰	۰/۵۴۰۰	۰/۱۴۴۳	۰/۵۱۴۳	۰/۲۴۳۳

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

۱۵	۰/۶۸۴۵	۰/۹۵	۰/۴۵۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۲۶۱۷	۰/۰۹۸۲
۱۶	۰/۶۱۲۷	۰/۹۰	۰/۵۲۵۰	۰/۱۱۵۱	۰/۴۰۲۱	۰/۴۶۴۱
۱۷	۱/۰۰۰۰	۰/۶۰	۰/۲۰۵۰	۰/۰۹۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۱۶۱۴
۱۸	۰/۶۳۳۷	۰/۶۵	۰/۲۳۵۰	۰/۰۵۹۱	۰/۳۴۹۲	۰/۰۶۷۸
۱۹	۰/۳۷۱۵	۰/۷۰	۰/۲۳۷۵	۰/۰۳۸۵	۰/۱۸۹۸	۰/۱۱۱۲
۲۰	۰/۵۸۲۷	۰/۵۵	۰/۵۰۰۰	۰/۱۱۰۱	۰/۶۱۴۵	۰/۷۶۴۳

جدول۶. کارایی *CCR* و وزن‌های ورودی و خروجی

شعب	$u_۱$	$u_۲$	$u_۳$	$v_۱$	$v_۲$	$v_۳$	کارایی CCR
۱	۱/۷۱۵۳	۱/۱۱۳۱	۰/۳۲۰۴	۰	۰	۶/۴۵۱۶	۱
۲	۱/۳۶۴۹	۰/۸۳۴۵	۰	۰	۱/۶۶۶۷	۰	۰/۸۳۲۸
۳	۰/۶۲۹۰	۰/۸۷۳۲	۰	۱/۲۵۲۸	۰	۰	۰/۹۹۰۹
۴	۰/۷۵۶۹	۰	۰/۸۵۴۱	۱/۱۱۳۶	۰	۰/۱۷۴۶	۱
۵	۰/۹۸۳۳	۰/۹۲۷۳	۰	۰/۶۶۴۵	۰	۱/۷۱۳۶	۰/۸۹۸۹
۶	۰/۲۸۶۷	۰/۵۸۱۶	۰/۲۳۰۴	۰	۱/۵۳۸۵	۰	۰/۷۴۷۷
۷	۱/۳۳۱۱	۰/۶۲۳۵	۰/۲۷۳۸	۰/۱۰۷۰	۱/۵۳۸۵	۰	۱
۸	۳/۴۵۴۸	۰/۹۴۵۴	۰/۴۸۶۴	۰	۰	۸/۳۳۳۳	۰/۷۹۷۸
۹	۲/۲۲۳۷	۱/۴۸۶۳	۰/۲۸۳۵	۰/۷۶۹۱	۰	۴/۶۹۷۹	۰/۷۸۸۷
۱۰	۱/۴۸۹۰	۰/۹۱۰۳	۰	۰	۱/۸۱۸۱	۰	۰/۲۸۸۸
۱۱	۰/۸۴۷۴	۰/۳۴۵۸	۰/۷۸۰۸	۱/۲۶۳۳	۰	۰/۳۳۲۸	۰/۶۰۴۰
۱۲	۰	۱/۸۵۰۲	۰	۰/۸۱۱۱	۰/۲۶۳۱	۰/۶۷۰۶	۱
۱۳	۰/۷۶۲۴	۱/۰۵۸۳	۰	۱/۵۱۸۴	۰	۰	۰/۸۱۶۶
۱۴	۱/۰۲۳۷	۰/۶۲۵۹	۰	۰	۱/۲۵۰۰	۰	۰/۴۶۹۶
۱۵	۰/۸۶۲۱	۰/۵۲۷۰	۰	۰	۱/۰۵۲۶	۰	۱
۱۶	۰/۸۸۸۰	۰/۶۵۴۱	۰/۵۹۰۵	۱/۶۳۲۱	۰	۰	۰/۶۳۹۲
۱۷	۰	۱	۰	۰/۶۹۶۶	۰/۲۰۷۹	۰/۸۷۱۲	۱
۱۸	۱/۰۴۷۷	۱/۱۷۸۵	۰	۱/۰۵۶۴	۰	۱/۴۰۶۷	۰/۴۷۳۴
۱۹	۰/۳۵۱۵	۱/۸۷۶۲	۰	۲/۶۹۱۸	۰	۰	۰/۴۰۸۱
۲۰	۰/۹۳۳۷	۰/۶۸۷۷	۰/۶۲۰۹	۱/۷۱۶۱	۰	۰	۱

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

جدول۷. ماتریس کارایی متقاطع معمولی، کارایی متقاطع معمولی و رتبه بندی حاصل از آن

شعب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	کارایی متقاطع	رتبه
۱	۱	۰/۶	۰/۴۸	۰/۳۶	۰/۷۵	۰/۵۷	۰/۵۶	۱	۰/۸۸	۰/۶	۰/۴۶	۰/۵۳	۰/۴۸	۰/۶	۰/۶	۰/۴۴	۰/۵۵	۰/۶۷	۰/۴۸	۰/۴۴	۰/۶۰	۱۱
۲	۰/۱۹	۰/۸۳	۰/۶۹	۰/۵۳	۰/۳۶	۰/۸۳	۰/۸۱	۰/۱۹	۰/۳	۰/۸۳	۰/۵۸	۰/۴۶	۰/۶۹	۰/۸۳	۰/۸۳	۰/۶۸	۰/۴	۰/۴۳	۰/۶۹	۰/۶۸	۰/۵۹	۱۲
۳	۰/۴۷	۰/۹	۰/۹۹	۰/۴	۰/۸	۰/۸	۰/۷۹	۰/۴۳	۰/۶۷	۰/۹	۰/۶۲	۰/۸۹	۰/۹۹	۰/۹	۰/۹	۰/۷۶	۰/۸۴	۰/۸۸	۰/۹۹	۰/۷۶	۰/۷۸	۶
۴	۱	۰/۸۶	۰/۶۲	۱	۰/۸۳	۱	۰/۹۹	۱	۱	۰/۸۶	۱	۰/۶۹	۰/۶۲	۰/۸۶	۰/۸۶	۰/۸۳	۰/۷	۰/۷۸	۰/۶۲	۰/۸۳	۰/۸۵	۴
۵	۰/۷۴	۰/۶۵	۰/۷۶	۰/۴۱	۰/۹۰	۰/۵۹	۰/۵۹	۰/۷۲	۰/۸۸	۰/۶۵	۰/۵۷	۰/۷۴	۰/۷۶	۰/۶۵	۰/۶۵	۰/۶۲	۰/۷۴	۰/۸۹	۰/۷۶	۰/۶۲	۰/۶۹	۸
۶	۰/۳۷	۰/۷۲	۰/۶۲	۰/۶۳	۰/۵۴	۰/۷۵	۰/۷۴	۰/۳۷	۰/۵۱	۰/۷۲	۰/۶۷	۰/۵۵	۰/۶۲	۰/۷۲	۰/۷۲	۰/۶۷	۰/۵۲	۰/۵۸	۰/۶۲	۰/۶۷	۰/۶۲	۱۰
۷	۰/۶۸	۱	۱	۰/۸۷	۰/۹۴	۱	۱	۰/۶۳	۰/۸۹	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰/۹۷	۱	۱	۱	۰/۹۵	۱
۸	۰/۷۴	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۳۹	۰/۴۷	۰/۳۲	۰/۳۲	۰/۸۰	۰/۶۱	۰/۲۹	۰/۴۱	۰/۲۸	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۳۴	۰/۲۹	۰/۴۱	۰/۲۹	۰/۳۴	۰/۳۹	۱۷
۹	۰/۷۱	۰/۴۱	۰/۶۲	۰/۴۹	۰/۷۶	۰/۴	۰/۴۱	۰/۶۶	۰/۷۹	۰/۴۱	۰/۶	۰/۶۲	۰/۶۲	۰/۴۱	۰/۴۱	۰/۵۸	۰/۶۴	۰/۷۴	۰/۶۲	۰/۵۸	۰/۵۷	۱۳
۱۰	۰/۱۱	۰/۲۹	۰/۲۵	۰/۱۲	۰/۱۹	۰/۲۶	۰/۲۶	۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۲۹	۰/۱۷	۰/۱۹	۰/۲۵	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۲	۰/۱۸	۰/۲۱	۰/۲۵	۰/۲	۰/۲۱	۲۰
۱۱	۰/۴۳	۰/۳۳	۰/۴۶	۰/۶	۰/۵۱	۰/۳۶	۰/۳۷	۰/۴۸	۰/۵۳	۰/۳۳	۰/۶۰	۰/۳۳	۰/۴۶	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۵۵	۰/۳۳	۰/۵۱	۰/۴۶	۰/۵۵	۰/۴۴	۱۴
۱۲	۰/۸۷	۰/۸۷	۰/۸۷	۰/۶۶	۱	۰/۸۴	۰/۸۴	۰/۷۵	۱	۰/۸۷	۰/۸۲	۱	۰/۸۷	۰/۸۷	۰/۷۸	۰/۸۲	۱	۱	۰/۸۷	۰/۸۲	۰/۸۸	۳
۱۳	۰/۵	۰/۵۵	۰/۸۲	۰/۴۵	۰/۷۶	۰/۵۱	۰/۵۱	۰/۴۷	۰/۶۸	۰/۵۵	۰/۶۱	۰/۷۱	۰/۸۲	۰/۵۵	۰/۵۵	۰/۶۸	۰/۶۹	۰/۸	۰/۸۲	۰/۶۸	۰/۶۴	۹
۱۴	۰/۲۶	۰/۴۷	۰/۴۴	۰/۲۷	۰/۳۹	۰/۴۴	۰/۴۳	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۴۷	۰/۳۵	۰/۴۱	۰/۴۴	۰/۴۷	۰/۴۷	۰/۳۸	۰/۳۹	۰/۴۲	۰/۴۴	۰/۳۸	۰/۴۰	۱۶
۱۵	۰/۷	۱	۱	۱	۱	۱	۰/۹۹	۱	۱	۱	۱	۰/۲۶	۱	۱	۱	۱	۰/۲۵	۱	۱	۱	۰/۹۱	۲
۱۶	۰/۲۳	۰/۳۳	۰/۵۵	۰/۶۲	۰/۳۷	۰/۳۵	۰/۳۷	۰/۲۳	۰/۳۴	۰/۳۳	۰/۶۳	۰/۴	۰/۵۵	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۶۴	۰/۳۸	۰/۴۳	۰/۵۵	۰/۶۴	۰/۴۳	۱۵
۱۷	۱	۰/۹۶	۰/۷۴	۰/۱۸	۱	۰/۸	۰/۷۶	۰/۷۸	۱	۰/۹۶	۰/۴۱	۰/۹۸	۰/۷۴	۰/۹۶	۰/۹۶	۰/۵۱	۱	۰/۹۵	۰/۷۴	۰/۵۱	۰/۸۰	۵
۱۸	۰/۳۴	۰/۴۳	۰/۴۳	۰/۱۴	۰/۴۶	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۴۲	۰/۳۴	۰/۲۵	۰/۴۵	۰/۴۳	۰/۳۴	۰/۳۴	۰/۳۱	۰/۴۵	۰/۴۷	۰/۴۳	۰/۳۱	۰/۳۶	۱۸
۱۹	۰/۱۸	۰/۶۹	۰/۴۱	۰/۲۷	۰/۳۳	۰/۱۷	۰/۱۸	۰/۱۹	۰/۲۸	۰/۱۸	۰/۳۴	۰/۳۲	۰/۴۱	۰/۱۸	۰/۱۸	۰/۳۷	۰/۳۱	۰/۳۶	۰/۴۱	۰/۳۷	۰/۲۸	۱۹
۲۰	۰/۷۲	۰/۶۸	۰/۸۳	۱	۰/۵۵	۰/۸	۰/۸۱	۰/۳۲	۰/۴۹	۰/۷۲	۱	۰/۷	۰/۸۳	۰/۷۲	۰/۷۲	۱	۰/۶۴	۰/۶۴	۰/۸۳	۱	۰/۷۳	۷

جدول۸. کارایی CCR بهبودیافته و وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌های حاصل از آن

شعب	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	کارایی
۱	۲/۶۷۴۷	۰/۷۳۱۹	۰/۳۷۶۵	۰	۰	۶/۴۵۱۶	۱
۲	۱/۳۶۴۹	۰/۸۳۴۴	۰	۰	۱/۶۶۶۶	۰	۰/۸۳۲۸
۳	۰/۶۲۹۰	۰/۸۷۳۲	۰	۱/۲۵۲۸	۰	۰	۰/۹۹۰۹
۴	۱/۹۷۴۲	۰/۵۴۰۳	۰/۲۷۷۹	۰	۰	۴/۷۱۹۰	۱
۵	۰/۹۸۳۲	۰/۹۲۷۲	۰	۰/۶۶۴۴	۰	۱/۷۱۳۵	۰/۸۹۸۹
۶	۱/۲۸۶۶	۰/۵۸۱۶	۰/۲۳۰۴	۰	۱/۵۳۸۵	۰	۰/۷۴۷۷
۷	۱/۱۰۶۶	۰/۷۸۱۷	۰/۱۳۲۱	۰/۲۸۸۵	۰/۶۰۳۱	۱/۲۳۰۶	۱
۸	۳/۴۵۴۸	۰/۹۴۵۴	۰/۴۸۶۴	۰	۰	۸/۳۳۳۳	۰/۷۹۷۸
۹	۲/۲۲۳۷	۱/۴۸۶۲	۰/۲۸۳۴	۰/۷۶۹۰	۰	۴/۶۹۷۹	۰/۷۸۸۷
۱۰	۱/۴۸۹۰	۰/۹۱۰۳	۰	۰	۱/۸۱۸۱	۰	۰/۲۸۸۸
۱۱	۰/۸۴۷۳	۰/۳۴۵۸	۰/۷۸۰۸	۱/۲۶۳۳	۰	۰/۳۳۲۸	۰/۶۰۴۰
۱۲	۱/۲۲۰۵	۰/۸۱۵۷	۰/۱۵۵۵	۰/۴۲۲۱	۰	۲/۵۷۸۵	۱
۱۳	۰/۷۶۲۳	۱/۰۵۸۳	۰	۱/۵۱۸۳	۰	۰	۰/۸۱۶۶
۱۴	۱/۰۲۳۷	۰/۶۲۵۸	۰	۰	۱/۲۴۹۹	۰	۰/۴۶۹۶
۱۵	۰/۸۱۱۸	۰/۶۱۷۲	۰/۲۷۱۵	۰/۶۴۴۴	۰	۱/۲۴۲۰	۱
۱۶	۰/۸۸۸۰	۰/۶۵۴۰	۰/۵۹۰۵	۱/۶۳۲۱	۰	۰	۰/۶۳۹۲
۱۷	۱/۶۴۰۴	۰/۸۵۲۴	۰	۰	۰	۴/۸۷۸۰	۱
۱۸	۱/۰۴۷۷	۱/۱۷۸۵	۰	۱/۰۵۶۳	۰	۱/۴۰۶۷	۰/۴۷۳۴
۱۹	۱/۳۵۱۵	۱/۸۷۶۲	۰	۲/۶۹۱۷	۰	۰	۰/۴۰۸۱
۲۰	۱/۲۰۳۲	۰/۴۴۵۵	۰/۷۷۶۸	۱/۰۲۸۵	۰/۷۲۸۵	۰	۱

ستون‌های دوم تا بیست و یکم جدول ۹ شامل ماتریس کارایی متقاطع بهبودیافته حاصل از وزن‌های بهینه‌ی نشان داده شده در جدول ۸ و ستون‌های بیست و دوم و بیست و سوم این جدول به ترتیب میزان کارایی متقاطع بهبودیافته و رتبه‌بندی به‌دست آمده از این روش می‌باشد.

از بیست شعبه‌ی بانکی، در دوازده شعبه، مدل اصلاح شده‌ی جدید همان وزن‌هایی را تولید کرد که از مدل CCR به‌دست آمد. در هشت مورد اما وزن‌های به‌دست آمده توسط مدل آشوب جدید کاملاً با وزن‌های مدل CCR متفاوت بوده است. در روش کارایی متقاطع با مدل CCR معمولی، شعبه‌ی هفتم دارای رتبه‌ی اول و شعبه‌ی پانزدهم دارای رتبه‌ی دوم شد و از بین واحد های کارا، پایین‌ترین رتبه مربوط به شعبه‌ی بیستم شده است. در روش کارایی متقاطع بهبودیافته نتایج کاملاً متفاوت به‌دست آمده است. این بار شعبه‌ی پانزدهم رتبه‌ی اول و شعبه‌ی هفتم رتبه‌ی دوم را اخذ کردند و از بین واحدهای کارا، شعبه‌ی دارای پایین‌ترین رتبه شعبه‌ی پنجم می‌باشد. این شعبه در روش کارایی متقاطع معمولی دارای رتبه‌ی هشتم بود. همچنین شعبه‌ی بیستم که در روش رتبه‌بندی معمولی، رتبه‌ی هفتم داشت، در روش کارایی متقاطع بهبود یافته رتبه‌ی نهم را به‌دست آورده است.

جدول۹. ماتریس کارایی متقاطع بهبود یافته، کارایی متقاطع بهبود یافته و رتبه بندی حاصل از آن

شعب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	کارایی متقاطع	رتبه
۱	۱	۰/۶	۰/۴۸	۱	۰/۷۵	۰/۵۷	۰/۷۴	۱	۰/۸۸	۰/۶۰	۰/۴۶	۰/۸۸	۰/۴۸	۰/۶۰	۰/۶۹	۰/۴۴	۱	۰/۶۷	۰/۴۸	۰/۴۶	۰/۶۹	۸
۲	۰/۱۹	۰/۸۳	۰/۶۹	۰/۱۹	۰/۳۶	۰/۸۳	۰/۴۴	۰/۱۹	۰/۳۰	۰/۸۳	۰/۵۸	۰/۳۰	۰/۶۹	۰/۸۳	۰/۴۰	۰/۶۸	۰/۱۹	۰/۴۳	۰/۶۹	۰/۷۳	۰/۵۲	۱۳
۳	۰/۴۳	۰/۹۰	۰/۹۹	۰/۴۳	۰/۸۰	۰/۸۰	۰/۴۳	۰/۶۷	۰/۹۰	۰/۶۲	۰/۶۲	۰/۶۷	۰/۹۹	۰/۹۰	۰/۷۴	۰/۷۶	۰/۴۸	۰/۸۸	۰/۹۹	۰/۶۷	۰/۷۴	۶
۴	۱	۰/۸۶	۰/۶۲	۱	۰/۸۳	۱	۱	۱	۱	۰/۸۶	۱	۱	۰/۶۲	۰/۸۶	۱	۰/۸۳	۰/۸۳	۰/۷۸	۰/۶۲	۱	۰/۸۹	۳
۵	۰/۷۲	۰/۶۵	۰/۷۶	۰/۷۲	۰/۹۰	۰/۵۹	۰/۷۹	۰/۷۲	۰/۸۸	۰/۶۵	۰/۵۷	۰/۸۸	۰/۷۶	۰/۶۵	۰/۸۲	۰/۶۲	۰/۷۶	۰/۸۹	۰/۷۶	۰/۵۴	۰/۷۳	۷
۶	۰/۳۷	۰/۷۲	۰/۶۲	۰/۵۴	۰/۷۵	۰/۶۲	۰/۶۲	۰/۳۷	۰/۵۱	۰/۷۲	۰/۶۷	۰/۵۱	۰/۶۲	۰/۷۲	۰/۶۰	۰/۶۷	۰/۳۵	۰/۵۸	۰/۶۲	۰/۷۲	۰/۵۸	۱۲
۷	۰/۶۳	۱	۱	۰/۶۳	۰/۹۴	۱	۱	۰/۶۳	۰/۸۹	۱	۱	۰/۸۹	۱	۱	۱	۱	۰/۶۲	۱	۱	۱	۰/۹۱	۲
۸	۰/۸۰	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۸۰	۰/۴۷	۰/۳۲	۰/۴۴	۰/۸۰	۰/۶۱	۰/۲۹	۰/۴۱	۰/۶۱	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۵۰	۰/۳۴	۰/۶۹	۰/۴۱	۰/۲۹	۰/۳۶	۰/۴۲	۱۵
۹	۰/۶۶	۰/۴۱	۰/۶۲	۰/۶۶	۰/۷۶	۰/۴۰	۰/۶۱	۰/۶۶	۰/۷۹	۰/۴۱	۰/۶۰	۰/۷۹	۰/۶۲	۰/۴۱	۰/۷۵	۰/۵۸	۰/۶۷	۰/۷۴	۰/۶۲	۰/۴۸	۰/۶۱	۱۱
۱۰	۰/۱۱	۰/۲۹	۰/۲۵	۰/۱۱	۰/۱۹	۰/۲۶	۰/۲۱	۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۲۹	۰/۱۷	۰/۱۶	۰/۲۵	۰/۲۹	۰/۱۸	۰/۲۰	۰/۱۲	۰/۲۱	۰/۲۵	۰/۲۰	۰/۲۰	۲۰
۱۱	۰/۴۸	۰/۳۳	۰/۴۶	۰/۴۸	۰/۵۱	۰/۳۶	۰/۴۵	۰/۴۸	۰/۵۳	۰/۳۳	۰/۶۰	۰/۵۳	۰/۴۶	۰/۳۳	۰/۵۷	۰/۵۵	۰/۴۲	۰/۵۱	۰/۴۶	۰/۴۹	۰/۴۶	۱۴
۱۲	۰/۷۵	۰/۸۷	۰/۸۷	۰/۷۵	۱	۰/۸۴	۱	۰/۷۵	۱	۰/۸۷	۰/۸۲	۱	۰/۸۷	۰/۸۷	۱	۰/۸۲	۰/۷۹	۱	۰/۸۷	۰/۸۰	۰/۸۸	۴
۱۳	۰/۴۷	۰/۵۵	۰/۸۲	۰/۴۷	۰/۷۶	۰/۵۱	۰/۶۵	۰/۴۷	۰/۶۸	۰/۵۵	۰/۶۱	۰/۶۸	۰/۸۲	۰/۵۵	۰/۷۲	۰/۶۸	۰/۵۱	۰/۸۰	۰/۸۲	۰/۵۴	۰/۶۳	۱۰
۱۴	۰/۲۵	۰/۴۷	۰/۴۴	۰/۲۵	۰/۳۹	۰/۴۴	۰/۴۲	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۴۷	۰/۳۵	۰/۳۵	۰/۴۴	۰/۴۷	۰/۳۹	۰/۳۸	۰/۲۶	۰/۴۲	۰/۴۴	۰/۳۷	۰/۳۸	۱۷
۱۵	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰/۸۵	۱	۱	۱	۰/۹۹	۱
۱۶	۰/۲۳	۰/۳۳	۰/۵۵	۰/۲۳	۰/۳۷	۰/۳۵	۰/۳۷	۰/۲۳	۰/۳۴	۰/۳۳	۰/۶۳	۰/۳۴	۰/۵۵	۰/۳۳	۰/۴۵	۰/۶۴	۰/۲۱	۰/۴۳	۰/۵۵	۰/۵۳	۰/۴۰	۱۶
۱۷	۰/۷۸	۰/۹۶	۰/۷۴	۰/۷۸	۱	۰/۸۰	۱	۰/۷۸	۱	۰/۹۶	۰/۴۱	۱	۰/۷۴	۰/۹۶	۰/۸۲	۰/۵۱	۱	۰/۹۵	۰/۷۴	۰/۴۶	۰/۸۲	۵
۱۸	۰/۲۹	۰/۳۴	۰/۴۳	۰/۲۹	۰/۴۶	۰/۲۹	۰/۴۰	۰/۲۹	۰/۴۲	۰/۳۴	۰/۳۴	۰/۴۲	۰/۴۳	۰/۳۴	۰/۴۰	۰/۳۱	۰/۳۴	۰/۴۷	۰/۴۳	۰/۲۵	۰/۳۷	۱۸
۱۹	۰/۱۹	۰/۱۸	۰/۴۱	۰/۱۹	۰/۳۳	۰/۱۷	۰/۲۵	۰/۱۹	۰/۲۸	۰/۱۸	۰/۲۴	۰/۲۸	۰/۴۱	۰/۱۸	۰/۳۳	۰/۰/۳۷	۰/۱۹	۰/۳۶	۰/۴۱	۰/۲۴	۰/۲۷	۱۹
۲۰	۰/۳۲	۰/۷۲	۰/۸۳	۰/۳۲	۰/۵۵	۰/۸۰	۰/۶۳	۰/۳۲	۰/۴۹	۰/۷۲	۱	۰/۴۹	۰/۸۳	۰/۷۲	۰/۶۸	۱	۰/۲۹	۰/۶۴	۰/۸۳	۱	۰/۶۶	۹

۷ نتیجه‌گیری

کارایی متقاطع روشی مؤثر برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای می‌باشد که چندین ورودی را به منظور تولید چندین خروجی استفاده می‌کنند. به دلیل وجود جواب‌های بهینه‌ی چندگانه در ارزیابی واحدها توسط مدل مضربی CCR، وزن‌های بهینه‌ی حاصل، منحصربه فرد نخواهد بود و لذا رتبه‌بندی حاصل از روش کارایی متقاطع نیز نمی‌تواند به صورت یکتا ارایه گردد. تا کنون برای رفع این مشکل از اهداف ثانویه استفاده می‌شد. در این مقاله با استفاده از مساله‌ی آشوب و ارتباط بین مسایل برنامه‌ریزی خطی پرایمال و دوآل، مدلی جدید پیشنهاد شده است به طوری که وزن‌های به‌دست آمده از این مدل و به دنبال آن رتبه‌بندی حاصل از روش کارایی متقاطع به صورت منحصربه فرد خواهند بود. به علاوه نتایج حاصل از روش پیشنهادی بر روی داده‌های واقعی برگرفته از بانک‌های تجاری ایران مور بررسی قرار گرفته است.

.

منابع

[۱۲] آقایی، ن.، حسین زاده لطفی، ف.، غلامی، ک.، قلج بیگی، ز.، (۱۳۹۷). رتبه‌بندی و تحلیل حساسیت رتبه‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها بر مبنای ابرصفحه‌های ایده آل. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۵(۲)، ۱۳۳–۱۲۵.

[۲۸] امیرتیموری، ع.، کردرستمی، س.، خوش اندام، ل.، عیلدوست ذوقی، پ.، (۱۳۹۲). بهبود قدرت تمایز تکنیک DEA با استفاده از ارزیابی برشی. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۰(۳)، ۶۹–۶۱.

[۴۸] الهویرنلو، ت.، واعظ، م.، (۱۳۹۷). رتبه بندی مراکز پژوهشی به کمک مدل توسعه‌یافته سیستم پشتیبان تصمیم گیری در تحلیل پوششی داده‌ها. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۵(۳)، ۲۵–۱۵.

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429–44.

[2] Farrell, M.J., (1957). The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society. Series A.120.253-281.

[3] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science. 30(9). 1078-1092.

[4] Wang, Y. M., and K. S. Chin. (2010a). A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension. Expert Systems with Applications 37 (5): 3666–3675.

[5] Andersen, P., and N. C. Petersen. (1993). A Procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis. Management Science 39 (10): 1261–1264.

[6] Thrall, R. M. (1996). Duality, classification and slacks in Data Envelopment Analysis. Annals of Operations Research 66: 109–138.

[7] Dula, J. H., and B. L. Hickman. (1997). Effects of excluding the column being scored from the DEA envelopment LP technology matrix. Journal of the Operational Research Society 48: 1001–1012.

[8] Sueyoshi, T. (1999). Data Envelopment Analysis non-parametric ranking test and index measurement: Slack-adjusted DEA and an application to Japanese agriculture cooperatives. Omega, 27: 315–326.

[9] Chen, Y. (2005). Measuring Super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility. European Journal of Operational Research 161 (2): 545–551.

[10] Chen, Y., S. Djamasbi, J. Du, and S. Lim. (2013). Integer-valued DEA Super-efficiency based on directional distance function with an application of evaluating mood and its impact on performance. International Journal of Production Economics 146 (2): 550–556.

[11] Banker, R. D., H. Chang, and Z. Zheng. (2015). On the use of Super-efficiency procedures for ranking efficient units and identifying outliers. Annals of Operations Research. doi:10.1007/s10479-015-1980-8.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]

[13] Sexton, T. R., R. H. Silkman, and A. J. Hogan. (1986). Data Envelopment Analysis: critique and extensions. In measuring efficiency: An assessment of Data Envelopment Analysis, edited by R. H. Silkman, 73–105. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

[14] Anderson, T. R., K. B. Hollingsworth, and L. B. Inman. (2002). The fixed weighting nature of a cross-evaluation model. Journal of Productivity Analysis 18 (1): 249–255.

[15] Despotis, D. K. (2002). Improving the discriminating power of DEA: Focus on globally efficient units. Journal of Operational Research Society 53: 314–325.

[16] Doyle, J. R., and R. H. Green. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. Journal of the Operational Research Society 45 (5): 567–578.

[17] Wu, J., L. Liang, Y. Zha, and F. Yang.(2009). Determination of cross-efficiency under the principle of rank priority in cross evaluation. Expert Systems with Applications 36 (3): 4826–4829.

[18] Contreras, I. (2012). Optimizing the rank position of the DMU as secondary goal in DEA cross-evaluation. Applied Mathematical Modelling 36 (6): 2642–2648.

[19] Ramón, N., J. L. Ruiz, and I. Sirvent. (2010). On the choice of weights profiles in cross-efficiency evaluations. European Journal of Operational Research 207 (3): 1564–1572.

[20] Jahanshahloo, G .R., Hosseinzadeh Loti, F., Jafari, Y., Maddahi, R., (2011). Selecting symmetric weights as a secondary goal in DEA cross-efficiency evaluation, Applied Mathematical Modelling 35 (1), 544-549.

[21] Wu, J., J. S. Sun, and L. Liang. (2012). Cross efficiency evaluation method based on weight-balanced Data Envelopment Analysis Model. Computers and Industrial Engineering 63: 513–519.

[22] Liang, L., J. Wu, W. D. Cook, and J. Zhu. (2008). Alternative secondary goals in DEA cross efficiency evaluation. International Journal of Production Economics 113: 1025–1030.

[23] Wang, Y. M., and K. S. Chin. (2010b). Some alternative models for DEA cross-efficiency evaluation. International Journal of Production Economics 128 (1): 332–338.

[24] Ruiz, J.L., Sirvent, I., (2012). On the DEA total weight flexibility and the aggregation in cross-efficiency evaluations. European Journal of Operational Research 223 (3), 732-738.

[25] Wang, Y. M., K. S. Chin, and S. Wang. (2012). DEA models for minimizing weight disparity in cross-efficiency evaluation. Journal of the Operational Research Society 63 (8): 1079–1088.

[26] Wu, J., J. Chu, J. Sun, and Q. Zhu. (2016). DEA cross-efficiency evaluation based on Pareto improvement. European Journal of Operational Research 248 (2): 571–579.

[27] Cook, W. D., and J. Zhu. (2014). DEA Cobb–Douglas frontier and cross-efficiency. Journal of the Operational Research Society 65 (2): 265–268.

[29] Green, R. H., J. R. Doyle, and W. D. Cook. (1996). Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation. European Journal of Operational Research 90: 461–472.

[30] Wu, J., L. Liang, and Y. Chen. (2009). DEA game cross-efficiency approach to olympic rankings. Omega 37: 909–918.

[31] Du, J., W. D. Cook, L. Liang, and J. Zhu. (2014). Fixed cost and resource allocation based on DEA cross-efficiency. European Journal of Operational Research 235: 206–214.

[32] Lim, S., K. W. Oh, and J. Zhu. (2014). Use of DEA cross-efficiency evaluation in portfolio selection: An application to Korean stock market. European Journal of Operational Research 236 (1): 361–368.

[33] Dotoli, M., N. Epicoco, M. Falagario, and F. Sciancalepore. (2015). A stochastic cross-efficiency Data Envelopment Analysis approach for supplier selection under uncertainty. International Transactions in Operational Research. doi:10.1111/itor.12155.

[34] Shang, J., and T. Sueyoshi. (1995). A Unified framework for the selection of flexible manufacturing system. European Journal of Operational Research 85 (2): 297–315.

[35] Etray, T., and D. Ruan. (2005). Data Envelopment Analysis based decision model for optimal operator allocation in CMS. European Journal of Operational Research 164 (3): 800–810.

[36] Macro, F., S. Fabio, C. Nicola, and P. Roberto. (2012). Using a DEA-cross efficiency approach in public procurement tenders. European Journal of Operational Research 218: 523–529.

[37] Charnes, A., W. W. Cooper, A. Y. Lewin, and L. M. Seiford, eds. (1994). Data Envelopment Analysis: Theory, methodology, and applications. Boston, MA: Kluwer.

[38] Sherman, H., D., Feranklin, G., (1985). Bank blanch operating efficiency evaluation with Data Envelopment Analysis. Journal of Banking and Finance. 9, 297-315. North Holland.

[39] Fukuyama, H., (1999). Technical and scale efficiency of Japanese commerical banks: a non-parametric approach. Applied of economics, 8, 1101–1112.

[40] Assaf, G. A., Barros, C. P., & Matousek, R. (2011). Technical efficiency in Saudi banks. Expert Systems with Applications, 38(May (5)), 5781–5786

[41] Mukherjee, A., (2002). Performance benchmarking and strategic homogeneity of Indian banks. European Journal of Operational Research, 2, 429–44.

[42] Kwon, H.-B., & Lee, J. (2015). Two-stage production modeling of large U.S. banks: A DEA-neural network approach. Expert Systems with Applications, 42(November(19)), 6758–6766.

[43] Holod, D., & Lewis, H. (2011). Resolving the deposit dilemma: A new DEA bank efficiency model. Journal of Banking and Finance, 35(11), 2801–2810.

[44] Gulati, R., & Kumar, S. (2017). Analysing banks intermediation and operating efficiencies using the two-stage network DEA model: The case of India. International Journal of Productivity and Performance Management, 66(4), 500–516.

[45] Sufian, F. (2015). Determinants of Malaysian bank efficiency: Evidence from bootstrap Data Envelopment Analysis. International Journal of Applied Nonlinear Science,2(1–2), 100–119.

[46] Pasiouras, F. (2008). International evidence on the impact of regulations and supervision on banks' technical efficiency: An application of two-stage Data Envelopment Analysis. Review of Quantitative Finance and Accounting, 30(2), 187–223.

[47] Luo, X. (2003). Evaluating the profitability and marketability efficiency of large banks: An application of data envelopment analysis. Journal of Business Research,56(1), 627–635.

[49] Murty, K. G., Linear Programming, John Wiley & Sons, Inc. NC, 1993.

[50] A. Amirteimoori and S. Kordrostami,(2005) Efficient surfaces and an efficiency index in DEA: a constant returns to scale, Applied Mathematics and Computation, vol. 163, no. 2, pp. 683–691.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.7.5]