مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره اول (پیاپی ۶۴)،بهار ۹۹، ص ص۸۳-۶۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا با استفاده از نظریه بازی همکارانه مبتنی بر مدل ورودی محورSBM و ارزش هسته‌ای

علی اشرفی [۱*]، مهدیه امیری [۲]
۱- استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
۲- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

رسید مقاله: ۱۰ خرداد ۱۳۹۷
پذیرش مقاله: ۴ آذر ۱۳۹۸

چکیده
در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده به کمک مدل‌های DEA، ممکن است بیش از یک واحد تصمیم‌گیرنده دارای مقدار کارایی یک باشد. از آنجایی که رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا برای تصمیم‌گیران ضروری است؛ لذا روش‌ها و مدل‌های مختلفی بدین منظور ارایه شده است. یکی از این روش‌ها، روش مبتنی بر استفاده از نظریه بازی‌ها برای تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا است. در این تحقیق، از مدل‌های لی و لوزانو [۲،۱] استفاده می‌شود که این مدل‌ها ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها هستند. همچنین از مدل SBM ورودی محور و ارزش هسته‌ای به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، نظریه بازی همکارانه، واحد تصمیم‌گیرنده، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا، ارزش هسته‌ای

۱ مقدمه
ارزیابی عملکرد سازمان‌ها با هر سیستمی، به منظور افزایش بهره‌وری، از اهمیت ویژه‌ای برخورداراست که معمولا با مدل‌بندی سیستم‌های مختلف به کمک شاخه‌های گوناگونی از ریاضیات، این امر تحقق می‌یابد. تحلیل پوششی داده‌ها که به اختصار DEA نامیده می‌شود، یکی از روش‌های غیرپارامتریک و کمی برای بررسی کارایی سیستم‌ها است. تحلیل پوششی داده‌ها برای اولین بار در دهه ۶۰ قرن بیستم میلادی توسط فارل [۳] معرفی شده است. در سال های بعد این روش توسط چارنز، کوپر و رودز [۴] توسعه یافت و اولین مدل CCR ارایه گردید. آنها یک مساله برنامه‌ریزی خطی را فرموله کردند که در آن واحدهای تصمیم‌گیرنده با چندین ورودی و خروجی ارزیابی می‌شدند. در ارزیابی عملکرد هر واحد تصمیم‌گیرنده توسط DEA، مقادیر کارایی نسبی بین

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: a_ashrafi@semnan.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

صفر و یک به‌دست می‌آید. واحدهای تصمیم‌گیرنده در DEA به دو دسته واحدهای کارا و ناکارا تقسیم می‌شوند که واحدهای کارا مقادیر کارایی برابر با یک دارند.

از آنجا که در مدل‌های کلاسیکDEA، معمولا بیش از یک واحد کارا وجود دارد، ارایه مدل‌هایی به منظور رتبه‌بندی واحدهای کارا و انتخاب یک واحد تصمیم‌گیرنده به عنوان کاراترین واحد در بین تمام واحدها، یکی از فعالیت‌های مورد توجه در تحلیل پوششی داده‌ها است. بدین منظور روش‌ها و مدل‌های مختلفی ارایه شده است[۶،۵].

یکی از این روش‌ها، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده مبتنی بر تئوری بازی همکارانه است. این روش ترکیبی از دو مدل بازی همکارانه و DEA است که تنها برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا به کار می‌رود. مقاله حاضر، مساله رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را با کمک مدل‌های معرفی‌شده توسط لی و همکاران و لوزانو و همکاران که یک روش بازی همکارانه هستند، حل می‌کند. مدل‌های لی و لوزانو یک مدل ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها هستند. ایده اصلی مدل‌های لی و لوزانو این است که اگر واحدهای تصمیم‌گیرنده کارایی که مرز کارا را تشکیل می‌دهند در نمونه حضور نداشته باشند، آنگاه مقدارکارایی همان واحدهای کارا و مقدار کارایی واحدهای ناکارا افزایش می‌یابد و ممکن است تعدادی از واحدهای ناکارا، کارا شوند. در مدل‌های لی و لوزانو از مدل CCR ورودی محور به منظور محاسبه مقادیر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و از ارزش شپلی به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا استفاده شده است [۲،۱].

ارزش هسته‌ای و ارزش شپلی دو روش متفاوت برای حل مساله تخصیص سود حاصل از همکاری بازیکنان در یک بازی همکارانه است که ارزش هسته‌ای یک مساله برنامه‌ریزی خطی است و ارزش شپلی به‌صورت یک فرمول ریاضی می‌باشد. هر دو راه حل ارزش هسته‌ای و ارزش شپلی یک جواب منحصر به فرد ارایه می‌دهند و ارزش هسته‌ای نسبت به ارزش شپلی جواب بهتری را ارایه می‌دهد [۷]. مدل CCR یک مدل شعاعی و مدل SBM یک مدل غیرشعاعی است. مدل‌های CCR و SBM نسبت به تغییر واحد پایدار هستند اما این مدل‌ها نسبت به انتقال پایدار نیستندکه این ویژگی‌ها در کتاب‌های کوپر و همکاران ۲۰۰۰ و ۲۰۰۶ بیان شده است [۸،۹،۱۰،۱۱ و۱۲]. مدل SBM نسبت به مدل CCR در توانایی ارایه معیارهای مناسب‌تر کارایی به ویژه برای واحدهای کارای ضعیف برتری دارد[۸].

لذا در طرح پیشنهادی از مدل SBM استفاده می‌کنیم و به منظور مقایسه ترتیب رتبه‌بندی طرح پیشنهادی خود با مدل‌های لی و لوزانو که از مدل ورودی محور CCR استفاده کردند، از مدل ورودی محور SBM استفاده می‌کنیم.

چون مرز کارا به کمک واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا تعریف می‌شود لذا ایده اندازه‌گیری تاثیر حذف زیر مجموعه‌ای از واحدهای کارا بر روی واحدهای تصمیم‌گیرنده دیگر می‌تواند نتیجه خوبی از رتبه‌بندی واحدهای کارا را به ما بدهد. لذا مقاله حاضر، سهم مشارکت یک واحد تصمیم‌گیرنده کارا را با کمک مدل‌های لی و لوزانو و مبتنی بر مدل SBM ورودی محور وارزش هسته‌ای اندازه‌گیری می‌کند تا بتواند طرح پیشنهادی خود را با

مدل‌های لی و لوزانو از نظر ترتیب رتبه‌بندی واحدهای کارا مقایسه کند. ایده‌ها و مفاهیم مدل ترکیبی نظریه بازی‌ها و تحلیل پوششی داده‌ها در بخش ادبیات موضوع شرح داده می‌شود.

ساختار این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، روش‌های مختلف مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها شرح داده می‌شود. در بخش ۳، مدل‌های لی و لوزانو شرح داده می‌شود. در بخش ۴، تحقیقات خود را به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا ارایه می‌دهیم. بخش ۵ یک مثال عددی کاربردی با توجه به داده‌های ارایه شده را گزارش می‌دهد. در نهایت بخش آخر، نتایج حاصل از این پژوهش شرح داده شده و زمینه‌های مطالعات بیش‌تر در تحقیقات آتی معرفی شده‌اند.

۲ ادبیات موضوع

در سال ۱۹۵۷ فارل [۳] با استفاده از روش اندازه‌گیری کارایی در مباحث مهندسی اقدام به اندازه‌گیری کارایی برای یک واحد تولیدی نمود. با این وجود او در ارایه روشی که در برگیرنده ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد باشد، موفق نبوده است. چارنز، کوپر و رودز [۴] دیدگاه فارل را توسعه داده و مدلی ارایه نمودند که توانایی اندازه‌گیری کارایی با چندین ورودی و خروجی را داشت. این مدل تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها نام گرفت. هدف در این مدل اندازه‌گیری و مقایسه کارایی نسبی واحدهای سازمانی مانند مدارس، بیمارستان‌ها، شعب بانک و... است که دارای چندین ورودی و خروجی شبیه به هم باشند.

در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها در سنجش واحدهای تصمیم‌گیرنده، معمولا بیش از یک واحد تصمیم‌گیری کارایی یک را دارد. لذا مقایسه آن‌ها امکان‌پذیر نیست. بنابراین یکی از فعالیت‌هایی که در مطالعات مربوط به تحلیل پوششی داده‌ها انجام می‌شود، ارایه روش‌هایی به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده است. به‌طور کلی چندین رده از روش‌های رتبه‌بندی DEA وجود دارد. در این مقاله به چهار رده مهم از رتبه‌بندی DEA اشاره می‌کنیم.

اولین رده رتبه‌بندیDEA، روش کارایی متقاطع است که توسط سکستون [۱۳] ارایه شده است. در این روش از مدل مضربی DEA بازده به مقیاس ثابت استفاده می‌شود و مقدار کارایی متقاطع هر DMU نه تنها با استفاده از مضرب‌های بهینه آن DMU بلکه با کمک مضرب‌های بهینه دیگر DMU ها به‌دست می‌آید. در سال ۲۰۱۸ فنگ لی و همکاران [۱۴] یک مدل ترکیبی از کارایی متقاطع و تئوری بازی همکارانه را ارایه دادند که بتواند یک جواب منحصر به فرد ارایه دهد.

رده دیگر رتبه‌بندیDEA، روش رتبه‌بندی مبتنی بر مجموعه مشترک وزن‌ها برای تمام DMU ها است که برای رتبه‌بندی تمام DMU ها به کار می‌رود. در این روش از مدل مضربی DEA بازده به مقیاس ثابت و متغیر استفاده می‌شود و معیارهای مختلفی را می‌توان برای انتخاب مجموعه مشترک وزن ها استفاده کرد. در سال ۲۰۱۸ سید حسین رضوی و همکاران [۱۵] یک روش فازی برای پیداکردن مجموعه وزن‌های بهینه ارایه دادند.

رده دیگر رتبه‌بندی DEA، روش رتبه‌بندی مبتنی بر ابرکارایی است که توسط اندرسن و پیترسن [۱۶] ارایه شده است و برای رتبه‌بندی DMU های کارا به کار می رود. در این روش یک DMU کارا از مجموعهDMU ها

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

حذف می‌شود و مقدار ابرکارایی آن DMU کارا حذف شده اندازه‌گیری می‌شود که معمولاً عددی بزرگتر از یک است. در سال ۲۰۱۶ لونگ گو و همکاران [۱۷] یک مدل ترکیبی ارایه دادند که مقدار کارایی واحدهای ناکارا و مقدار ابرکارایی واحدهای کارا را به‌دست می‌دهد.

آخرین رده رتبه‌بندی DEA، روش رتبه‌بندی مبتنی بر Cross-influence [۲،۱] است که این روش مشابه روش ابرکارایی است با این تفاوت که در آن یک زیرمجموعه‌ای از DMU های کارا از مجموعه DMU ها حذف می‌شوند و تاثیر حذف DMU های کارا حذف شده در تمام DMU ها اندازه‌گیری می‌شود. در طرح پیشنهادی ما، یک زیرمجموعه معینی از DMU های کارا حذف می‌شوند و سپس تاثیر حذف DMU های کارا حذف شده در تمام DMU ها اندازه‌گیری می‌شود. جدول ۱ تعدادی از مقاله‌های مربوط به این چهار رده را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مقاله های متناظر در چهار رده رتبه‌بندی ذکر شده

مقاله‌ها	عنوان مقاله‌ها
Doyle and Green (1994) [۱۸]	Secondary goals (aggressive /benevolent formulation)
Wang and Chin (2010a) [۱۹]	Secondary goal (neutral formulation)
Alcaraz, Ramón, Ruiz, and Sirvent (2013) [۲۰]	Compute ranking intervals; mixed-integer non-linear program
Despotis (2002) [۲۱]	Min convex combination of max and sum of deviations w.r.t. DEA efficiencies
Sun, Wu, and Guo (2013) [۲۲]	Max efficiency subject to efficiency of ideal/anti-ideal DMU equal to unity
Ruiz and Sirvent (2016) [۲۳]	Min sum of distances to closest targets in common best practice frontier; compute ranking intervals
Rezaeiani and Foroughi (2018) [۲۴]	Ranking efficient decision making units in data envelopment analysis based on reference frontier share
Rezai Balf, Zhiani Rezai, Jahanshahloo, and Hosseinzadeh Lofti (2012) [۲۵]	Non-oriented Tecbycheff norm model
Liua and Wanga (2018) [۲۶]	Ranking DMUs by using the upper and lower bounds of the normalized efficiency in data envelopment analysis
Du, Liang, Yang, Bi, and Yu (2010) [۲۷]	Impact of efficient DMUs on the inefficient DMUs plus impact of efficient DMUs on the impact of the other efficient DMUs

یکی از روش‌های رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا، رتبه‌بندی مبتنی بر نظریه بازی‌ها است که یک روش ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها است. در زمینه تلفیق دو روش نظریه بازی‌ها و تحلیل پوششی داده‌ها تحقیقات بی‌شماری انجام شده است: در سال ۲۰۰۶ ناکابایاشی و همکاران [۲۸] پژوهشی تحت عنوان "معمای یک انسان خودخواه، یک بازی" DEA ارایه دادند که دو روش تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها را ترکیب کرده و به بررسی آن پرداختند. آن‌ها اتفاق نظر بین اشخاص و سازمان‌هایی که دارای معیارهای مختلف برای ارزیابی عملکرد خود بودند را با استفاده از نظریه بازی همکارانه حل کردند.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

جی و همکاران [۲۹] کارایی متقاطع واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها را با استفاده از نظریه بازی‌ها تعیین کردند. آن‌ها یک بازی ائتلافی را تعریف کردند که در آن DMUها، بازیکنان این بازی هستند و برای تمام ائتلاف‌ها مقدار توابع مشخصه را تعیین کردند. آن‌ها ارزش هسته‌ای را به عنوان راه حل در نظر گرفتند و از الگوریتم ژنتیک برای به‌دست آوردن ارزش هسته‌ای و وزن نهایی هر DMU استفاده کردند.

لی و همکاران [۱] یک روش جدیدی به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا ارایه دادند. آن‌ها با استفاده از نظریه بازی همکارانه، یک زیرمجموعه معینی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را از نمونه حذف نموده و تاثیر حذف آن را روی مقدارکارایی واحدهای کارا اندازه‌گیری کردند. لوزانو و همکاران [۲] یک بازی متفاوت همکارانه مبتنی بر مدل لی ارایه دادند که در آن تاثیر حذف یک زیرمجموعه معینی از واحدهای کارا بر کارایی واحدهای ناکارا اندازه‌گیری شد.

لی و لیانگ [۳۰] در سال ۲۰۱۰ تحقیقی را انجام دادند که به تعیین اهمیت متغیرهای ورودی و خروجی تحلیل پوششی داده‌ها با ابزار نظریه بازی همکارانه پرداختند. علی نژاد و زمانی [۳۱] یک مدل ترکیبی DEA و تئوری بازی ارایه دادند که شاخص‌های کارت امتیازی متوازن را رتبه‌بندی می‌کند.

لوزانو و همکاران [۳۲] یک مدل برنامه‌ریزی خطی در نظر گرفتند که در آن تصمیم‌گیرندگان با استفاده از یک بازی همکارانه، منابع خود را ادغام و به اشتراک می‌گذارند. آن‌ها با به‌کارگیری ارزش هسته‌ای و به‌دست آمدن نتایج انواع ائتلاف در یک برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، به حداکثر تولید دست یافتند.

پس از مروری بر پژوهش‌های انجام شده در رویکردهای ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها، مدل‌های لی و لوزانو را درنظر می‌گیریم و مدل SBM ورودی محور و ارزش هسته‌ای را به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا به کار می‌گیریم.

۳ شرح مدل لی و لوزانو

نظریه بازی‌ها علمی است که به مطالعه تصمیم‌گیری افراد در شرایط تعامل با دیگران می‌پردازد. نظریه بازی‌ها به دو شاخه اصلی تقسیم می‌شود بازی‌های همکارانه و بازی‌های بدون همکاری. اساس بازی بدون همکاری بر مبنای رقابت و کسب بیشترین سود در بین بازیکنان است. در بازی بدون همکارانه هر بازیکن استراتژی خود را بدون مشورت با بازیکنان دیگر انتخاب می‌کند. در حالی که در بازی همکارانه، بازیکنان درخصوص تصمیم‌گیری درباره استراتژی‌ها با یکدیگر همکاری می‌کنند. به منظور امکان همکاری بین واحدهای تصمیم‌گیرنده به عنوان بازیکنان در تحلیل پوششی داده‌ها از بازی همکارانه استفاده می‌شود که یک تابع مشخصه قوی برای تعیین نتیجه هر ائتلاف وجود دارد [۳۱،۳۳،۲۶].

یک بازی همکارانه، یک زوج مرتب به فرم (N,v) است که N یک مجموعه متناهی بازیکنان است. v یک تابع مشخصه با مقدار حقیقی است که به صورت $v:2^N \to \mathbb{R}$ و $v(\varnothing)=0$ است. زیرمجموعه S از N را یک ائتلاف می‌نامند. مقدار $v(S)$ ارزش ائتلاف در بازی همکارانه (N,v) را نشان می‌دهد. در بازی همکارانه دو موضوع مطرح است. اول اینکه چه ائتلافی شکل بگیرد. دوم اینکه در صورت شکل‌گیری ائتلاف،

بازیکنان چگونه سود یا هزینه را تقسیم خواهند کرد [۲،۱،۲۶،۳۳،۳۱]. نمادها و متغیرهای به کار رفته در این مقاله در جدول زیر شرح داده شده است:

جدول ۲. نمادها و متغیرهای به‌کاررفته

مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده مستقل	M
مجموعه واحدهای کارا	N
مجموعه ورودی‌ها	I
مجموعه خروجی‌ها	H
زیرمجموعه واحدهای کارا N (ائتلاف)	S
تعداد اعضای مجموعه N	n
تعداد اعضای مجموعه S	s
تابع مشخصه	v
مقدار کارایی $\mathrm{DMU_j}$ زمانی که تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا در نمونه حضور دارند	$E_j(\mathrm{M})$
مقدار کارایی $\mathrm{DMU_j}$ زمانی که واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا متعلق به S در نمونه حضور ندارند	$E_j(\mathrm{M}\setminus \mathrm{S})$
واحد کارا متعلق به S	k
ورودی i ام یک واحد تصمیم‌گیرنده $\mathrm{DMU_j}$	x_{ij}
خروجی r ام یک واحد تصمیم‌گیرنده $\mathrm{DMU_j}$	y_{rj}
ارزش ائتلاف S	v(S)
ارزش ائتلاف S با در نظرگرفتن واحد کارا k	$\mathrm{v(S\cup\{k\})}$

مدل لی و همکاران یک بازی همکارانه است که در آن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا، مجموعه بازیکنان هستند و تابع مشخصه برای هر $S \subseteq N$، مجموع تغییرات مقدار ابرکارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا در ائتلاف S را نشان می‌دهد. لذا مدل لی یک بازی همکارانه $(\mathrm{N,v})$ است که تابع مشخصه برای هر $S \subseteq N$ به‌صورت زیر است:

$$v(S)=\sum_{k\in S}(E_k\left(M\setminus S\right)-۱) \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم M مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده مستقل باشد. برای هر $T\subseteq M$، فرض کنید $\mathrm{E}_j\left(\mathrm{T}\right)$ مقدارکارایی CCRورودی محور یک واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j \in T$ با در نظرگرفتن تنها واحدهای تصمیم‌گیرنده متعلق به T در نمونه باشد.

فرض کنید m واحد تصمیم‌گیرنده مستقل $j\in M=\{۱,۲,\ldots,m\}$ ، دارای k ورودی $i\in I=\{۱,۲,\ldots,k\}$ و h خروجی $r\in H=\{۱,۲,\ldots,h\}$ باشند. دراین‌صورت مقدارکارایی CCR ورودی محور یک $DMU_{j.}\in M$ به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
E_{j.}(\mathrm{M}) = \min \theta_{j.} & \\
s.t. \quad \sum_{j \in M} \lambda_j x_{ij} \le \theta_{j.} x_{ij.} & \qquad \forall\, i \in I \\
\sum_{j \in M} \lambda_j y_{rj} \ge y_{rj.} & \qquad \forall\, r \in H \\
\lambda_j \ge \circ & \qquad \forall\, j \in M \\
& \qquad \theta_{j.} \ \text{free}
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

مدل لوزانو یک بازی همکارانه متفاوتی است که در آن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا مجموعه بازیکنان هستند و تابع مشخصه برای هریک، مجموع تغییرات مقدار کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده ناکارا $j \in M \setminus N$ در ائتلاف را نشان می‌دهد.

$$\mathrm{v(S)} = \sum_{j \in M \setminus N} (\mathrm{E_j(M \setminus S) - E_j(M)}) \qquad (۳)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در مدل‌های لی و لوزانو یک بازی همکارانه $(\mathrm{N, v})$ وجود دارد که N مجموعه بازیکنان و v یک تابع مشخصه است. در مدل لی تاثیر حذف زیرمجموعه معینی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا بر روی واحدهای کارا اندازه‌گیری می‌شود اما در مدل لوزانو تاثیر حذف زیر مجموعه معینی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا بر روی واحدهای ناکارا اندازه‌گیری می‌شود.

از ارزش شپلی به عنوان راه حل جواب بازی همکارانه $(\mathrm{N, v})$ در مدل‌های لی و لوزانو استفاده شده است. ارزش شپلی یکی از روش‌ها در نظریه بازی همکارانه به منظور محاسبه تخصیص عایدی حاصل از همکاری بین بازیکنان ائتلاف است [۲۶،۲۵،۲۴]. در مدل‌های لی و لوزانو، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا با کمک ارزش شپلی و مدل CCR انجام می‌گیرد. بنابراین اهمیت هر واحد تصمیم گیرنده کارا $k \in N$ با معیار زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi_k(\mathrm{v}) = \sum_{S \subseteq N \setminus k} \frac{s!(\mathrm{n-s-1})!}{n!} (\mathrm{v}(S \cup \{\mathrm{k}\}) - \mathrm{v(S)}) \qquad (۴)$$

که n تعداد اعضای مجموعه N و s تعداد اعضای ائتلاف S است.

الگوریتم زیر بیانگر حرکت گام به گام مدل های لی و لوزانو به سمت اهمیت واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا است:

ابتدا یک واحد تصمیم‌گیرنده کارا $k \in N$ را به عنوان یک بازیکن درنظر گرفته و سپس تمام زیرمجموعه‌های (ائتلاف‌های) N بدون بازیکن k از S لیست می‌شوند (به عنوان نمونه در ستون اول جدول۴، تمامی ائتلاف‌های ممکن بدون بازیکن A (واحد تصمیم‌گیرنده A) آورده شده است).

مدل CCR، سه مرتبه حل شده و مقادیر کارایی $E_j(\mathrm{M})$، $E_j(\mathrm{M \setminus S})$ و $\mathrm{E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))}$ محاسبه می‌شوند (به عنوان مثال جدول ۴، مقادیر کارایی گام دوم را نشان می‌دهد).

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

مقادیر $v(S)$ و $v(S \cup \{k\})$ با توجه به رابطه تابع مشخصه تعریف شده (۱) و (۳) برای مدل‌های لی و لوزانو محاسبه می‌شود (جدول ۵ را ببینید).

با استفاده از فرمول ارزش شپلی (۴)، مقدار ارزش شپلی و اهمیت بازیکن‌ها در تعیین کارایی مشخص می‌شود (جدول ۶ را ببینید).

مثال ۱.[۲] مجموعه داده‌های مربوط به شش واحد تصمیم‌گیرنده در جدول ۳ آورده شده است که $M = \{A, B, C, D, E, F\}$ است. واحدهای تصمیم گیرنده دارای دو ورودی و یک خروجی می‌باشند. واحدهای تصمیم‌گیرنده A، B، C وD کارا و E وF واحدهای ناکارا هستند. مجموعه بازیکنان، مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا هستند.

جدول ۳. مجموعه داده‌های مربوط به مثال ۱

DMUs $j = ۱, ۲, .., ۶$	ورودی‌ها		خروجی
	$x_{۱j}$	$x_{۲j}$	$y_{۱j}$
A	۱	۸	۱
B	۲	۴	۱
C	۴	۲	۱
D	۸	۱	۱
E	۵	۵	۱
F	۳	۱۰	۱

جدول زیر مقدار کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده را در تمام زیرمجموعه‌های (ائتلاف‌های) ممکن از N بدون بازیکن A را نشان می‌دهد تا اهمیت واحد تصمیم‌گیرنده A حاصل شود ($k = A$).

جدول ٤. مقادیر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در تمام زیرمجموعه‌های (ائتلاف‌های) ممکن از N بدون بازیکن A

S	*DMUs*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
$\{\varnothing\}$	$E_j(M)$	۱	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۴
	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۲	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۶۶۶۷
$\{B\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۲۵	۱	۱	۰/۶۶۶۷	۰/۶۲۵
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۳	۱/۷	۱	۱	۰/۷۵۵۶	۱
$\{C\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱/۲۵	۱	۰/۶۶۶۷	۰/۵۴۵۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۲	۱	۱/۲۵	۱	۰/۶۶۶۷	۰/۶۶۶۷
$\{D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱	۲	۰/۶	۰/۵۴۵۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۲	۱	۱	۲	۰/۶	۰/۶۶۶۷
$\{B, C\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۵	۱/۵	۱	۰/۹	۰/۶۹۲۳۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۳	۱/۹۴	۱/۵۹	۱	۱	۱

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

$\{B,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱/۲۵	۱	۲	۰/۶۶۶۷	۰/۶۲۵
	$E_j(M\setminus (S\cup\{k\}))$	۳	۱/۷	۱	۲	۰/۷۵۵۶	۰/۱
$\{C,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱	۲	۴	۰/۸	۰/۵۴۵۴
	$E_j(M\setminus (S\cup\{k\}))$	۲	۱	۲	۴	۰/۸	۰/۶۶۶۷
$\{B,C,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱/۵۹۰۹	۲/۵	۵	۱	۰/۷۱۴۲۹۱
	$E_j(M\setminus (S\cup\{k\}))$	۳	۱/۹۴۴۴	۲/۵	۵	۱	۱

ستون‌های سوم تا ششم جدول ۴، مقادیر ابرکارایی واحدهای کارا را با توجه به مدل لی برای هر ائتلاف S و ستون‌های هفتم وهشتم جدول ۴، مقدار کارایی واحدهای ناکارا را با توجه به مدل لوزانو برای هر ائتلاف S را نشان می‌دهند. جدول زیر مقادیر تابع مشخصه $v(S)$ و $v(S\cup\{k\})$ مربوط به تابع مشخصه تعریف شده مدل لی و لوزانو را نشان می‌دهد($k = A$).

جدول ۵. تابع مشخصه برای هر ائتلاف S مدل لی و لوزانو

S	روش لی			روش لوزانو		
	$v(S)$	$v(S\cup\{k\})$	$v(S\cup\{k\})-v(S)$	$v(S)$	$v(S\cup\{k\})$	$v(S\cup\{k\})-v(S)$
$\varnothing$	۰	۱	۱	۰	۰/۱۲۱۲۱۲	۰/۱۲۱۲۱۲
$\{B\}$	۲/۵	۲/۷	۲/۴۵	۰/۱۴۶۲۱	۰/۶۱۰۱	۰/۴۶۳۸۹
$\{C\}$	۰/۲۵	۱/۲۵	۱	۰/۰۶۶۶	۰/۱۸۸۸۷	۰/۱۲۱۷۷
$\{D\}$	۱	۲	۱	۰	۰/۱۲۱۲۱۲	۰/۱۲۱۲۱۲
$\{B,C\}$	۱	۳/۵۳	۲/۵۳	۰/۴۴۶۸۴	۰/۸۵۴۵۴۵	۰/۴۰۷۷
$\{B,D\}$	۱/۲۵	۳/۷	۲/۴۵	۰/۱۴۶۲۱	۰/۶۱۰۱	۰/۴۶۳۸۹
$\{C,D\}$	۴	۵	۰	۰/۲	۰/۳۲۱۲۱	۰/۱۲۱۲۱۲
$\{B,C,D\}$	۶/۰۹	۸/۴۴۴۴	۲/۳۵۴	۰/۵۶۸۸	۰/۸۵۴۵۵	۰/۱۲۱۲۱۲

پس از اجرای الگوریتم ذکرشده بالا برای هر واحد تصمیم‌گیرنده کارای DMU_k، ارزش شپلی و رتبه‌بندی هر بازیکن k باتوجه به تعریف مدل‌های لی و لوزانو به شرح جدول زیر آمده است.

جدول ٦. ارزش شپلی و رتبه‌بندی هر DMU کارا

واحدهای کارا	روش لی		روش لوزانو	
	ارزش شپلی	رتبه‌بندی	ارزش شپلی	رتبه‌بندی
A	۱/۶۲۴۶	۴	۰/۲۴۳۳۲۰	۲
B	۱/۹۰۴۹	۳	۰/۳۸۱۵۲۶	۱
C	۲/۲۲۱۶۳۳	۲	۰/۱۹۷۳۰۹	۳
D	۲/۲۹۳۱۸۱۸۲	۱	۰/۰۳۲۳۸۸	۴

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

٤ تحقیق پیشنهادی

ارزش‌ها در نظریه بازی همکارانه، تخصیص عایدی حاصل از همکاری بین بازیکنان گروه را محاسبه می‌کند. یکی از روش‌های محاسبه تخصیص عایدی در یک بازی همکارانه، ارزش هسته‌ای است که برای به‌دست آوردن جواب یکتای معادلات در ناحیه مرکز به کار می‌رود [۲۹،۲۸]. ناحیه مرکز به صورت زیر است:

$$C = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{i \in N} x_i = \mathrm{v(N)} \;\; and \; \sum_{i \in S} x_i \geq \mathrm{v(S)} \;\; for \; \forall \; S \subset N\} \tag{۵}$$

$\mathrm{v(N)}$ ارزش ائتلاف N را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم بردار $x = (x_1, \ldots, x_n)$ سهم اختصاص‌یافته به هر بازیکن باشد که در آن n تعداد بازیکنان است. قید اول، یک قید عقلانیت گروهی است که تقسیم عایدی حاصل از بازی همکارانه میان اعضای ائتلاف N است. قید دوم ناحیه مرکز، یک قید عقلانیت فردی است که براساس آن پیامد حاصل از پیوستن فرد به ائتلاف نباید کمتر از پیامد حاصل از فعایت فردی باشد.

ارزش هسته‌ای بر اختلاف بین $\mathrm{v(S)}$ و $\sum_{i \in S} xi$ متمرکز است و هدف آن کاهش نارضایتی از مشارکت در هر ائتلاف تا حد امکان است. ارزش هسته‌ای، یک مساله برنامه‌ریزی خطی است که به حداقل‌سازی نارضایتی‌ها می‌پردازد [۲۹، ۳۱ ،۳۲ ،۳۳، ۳۴ و ۳۵]:

$$\begin{aligned} & \min_{x} \; \varepsilon \\ & s.t. \quad \mathrm{v(S)} - \sum_{i \in S} x_i \leq \varepsilon \;\; for \;\; \forall \; S \subset N \,, \, S \neq \varnothing \\ & \sum_{i \in N} x_i = \mathrm{v(N)} \\ & \varepsilon \in \mathbb{R}, \;\; x_i \in \mathbb{R} \quad \forall \; i \in N \end{aligned} \tag{۶}$$

برای محاسبه ارزش شپلی و هسته‌ای باید مقادیر تابع مشخصه v را داشته باشیم. لذا در یک مساله بازی همکارانه N- نفره نیاز به محاسبه $۲^{N-۱}$ تابع مشخصه $\mathrm{v(S)}$ به عنوان ورودی‌های مساله ارزش شپلی و هسته‌ای داریم. ارزش هسته‌ای یک روندی از مرتبه $O(N^۳)$ و ارزش شپلی یک روندی از مرتبه $O(N)$ است [۷]. یعنی در ارزش هسته‌ای با N برابرشدن تعداد واحدهای کارا، میزان کار لازم $N^۳$ برابر و در ارزش شپلی با N برابرشدن تعداد واحدهای کارا، میزان کار لازم N برابر می‌شود. بنابراین محاسبه ارزش شپلی خیلی ساده‌تر از ارزش هسته‌ای است. از طرفی ارزش هسته‌ای یک مدل برنامه‌ریزی خطی است که بر اختلاف بین $\mathrm{v(S)}$ و $\sum_{i \in S} xi$ متمرکز است و تا حد امکان نارضایتی از مشارکت در هر ائتلاف را مینیمم می‌کند. لذا جواب بهتری نسبت به ارزش شپلی ارایه می‌دهد.

در این مقاله از پیچیدگی محاسباتی این دو ارزش شپلی و هسته‌ای صرف‌نظر می‌کنیم و تنها روی رتبه‌بندی به‌دست آمده از طرح پیشنهادی و روش‌های لی و لوزانو تمرکز می‌کنیم. در تحقیق پیشنهادی، در هر یک از

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

مدل‌های لی و لوزانو از مدل SBM ورودی محور به جای مدل CCR ورودی محورو از ارزش هسته‌ای به جای ارزش شپلی به عنوان راه حل بازی همکارانه استفاده می‌کنیم. ایده اصلی این است که تاثیر حذف یک زیرمجموعه از واحدهای کارا روی واحدهای کارا و ناکارا را با کمک ارزش هسته‌ای و مدل غیرشعاعی SBM ورودی محور بررسی کنیم.

فرض کنید m واحد تصمیم‌گیرنده مستقل $j \in M = \{1,2,\ldots,m\}$ دارای k ورودی $i \in I = \{1,2,\ldots,k\}$ و h خروجی $r \in H = \{1,2,\ldots,h\}$باشند. در این‌صورت مقدارکاراییSBMورودی محور یک $DMU_{j.} \in M$ به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
E_{j.}(\mathrm{M}) = \min\ & 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{S_i^-}{x_{ij.}} \\
s.t.\quad & \sum_{j\in M}\lambda_j x_{ij} + S_i^- = x_{ij.} && \forall\, i \in I \\
& \sum_{j\in M}\lambda_j y_{rj} \geq y_{rj.} && \forall\, r \in H \\
& \lambda_j \geq 0 && \forall\, j \in M \\
& S_i^- \geq 0 && \forall\, i \in I
\end{aligned}
\tag{7}
$$

فرض می‌کنیم M مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده مستقل باشد. برای هر $T \subseteq M$، فرض کنید $\mathrm{E}_j(T)$ مقدارکارایی SBM ورودی محور یک واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j \in T$ با در نظر گرفتن تنها واحدهای تصمیم‌گیرنده متعلق به T در نمونه باشد.

الگوریتم زیر بیان‌گر حرکت گام به گام تحقیق پیشنهادی ما به سمت اهمیت واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا است:

تمام زیرمجموعه‌های (ائتلاف‌های) ممکن از مجموعه بازیکنان N لیست می‌شوند (به مثال یک بر می گردیم، در جدول ۷ تمامی ائتلاف‌های ممکن از مجموعه بازیکنان آورده شده است).

مدل ورودی محور SBM، دو مرتبه حل شده و مقادیر کارایی $\mathrm{E_j(M)}$ و $\mathrm{E_j(M \setminus S)}$ محاسبه می‌شود (به عنوان مثال در جدول ۷، مقادیر کارایی گام دوم برای هر ائتلاف ممکن از مجموعه بازیکنان را نشان می‌دهد).

مقادیر v(S)با توجه به تعریف تابع مشخصه مربوط به مدل لی و لوزانو محاسبه می‌شوند (جدول ۸ را ببینید).

با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی (۶) ارزش هسته‌ای و اهمیت بازیکن‌ها در تعیین کارایی مشخص می‌شود (جدول ۹ را ببینید)

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

جدول ۷. مقادیر کارایی گام دوم برای هر ائتلاف ممکن از مجموعه بازیکنان

S	*DMUj*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
	$E_j(M)$	۱	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\varnothing$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{A\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱/۵	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{B\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱/۲۵	۱	۱	۰/۶	۰/۵۶۶۶۶
$\{C\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱	۱/۲۵	۱	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱	۱	۱/۲۵	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{A,B\}$	$E_j(M\setminus S)$	۲/۱۲۴۹	۱/۴۳۷۵	۱	۱	۰/۶	۱
$\{A,C\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱/۵	۱	۱/۲۵	۱	۰/۶	۱
$\{A,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱/۵	۱	۱	۱/۵	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{B,C\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱/۳۷۵	۱/۳۷۵	۱	۰/۹	۰/۵۶۶۶۶
$\{B,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱/۲۵	۱	۱/۵	۰/۶	۰/۵۶۶۶۶
$\{C,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱	۱/۵	۲/۵	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{A,B,C\}$	$E_j(M\setminus S)$	۲/۱۲۵	۱/۸۷۵	۱/۴۰۶۲۵	۱	۱	۱
$\{A,B,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۲/۱۲۴۹	۱/۴۳۷۵	۱	۱/۵	۰/۶	۱
$\{A,C,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱/۵	۱	۱/۵	۲/۵	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{B,C,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۱	۱/۴۰۶۳	۱/۸۷۵	۳	۱	۰/۵۶۶۶۶
$\{A,B,C,D\}$	$E_j(M\setminus S)$	۲/۱۲۵	۱/۸۷۵	۱/۸۷۵	۳	۱	۱

ستون‌های سوم تا ششم جدول ۷، مقادیر ابرکارایی واحدهای کارا را با توجه به مدل لی برای هر ائتلاف S و ستون‌های هفتم و هشتم جدول۷، مقدار کارایی واحدهای ناکارا را با توجه به مدل لوزانو برای هر ائتلاف S نشان می‌دهند. جدول زیر، مقادیر تابع مشخصه $v(S)$ مربوط به مدل‌های لی و لوزانو برای هر ائتلاف S را نشان می‌دهد.

جدول ۸. تابع مشخصه $v(S)$ مربوط به مدل های لی و لوزانو برای هر ائتلاف S

S	روش لی	روش لوزانو
$\varnothing$	۰	۰
$\{A\}$	۰/۵	۰
$\{B\}$	۰/۲۵	۰/۳۳۳۳
$\{C\}$	۰/۲۵	۰
$\{D\}$	۰/۵	۰
$\{A,B\}$	۱/۵۶۲۴۹۹	۰/۴۶۶۶۶۷
$\{A,C\}$	۰/۷۵	۰
$\{A,D\}$	۱	۰
$\{B,C\}$	۰/۷۵	۰/۳۳۳۳

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

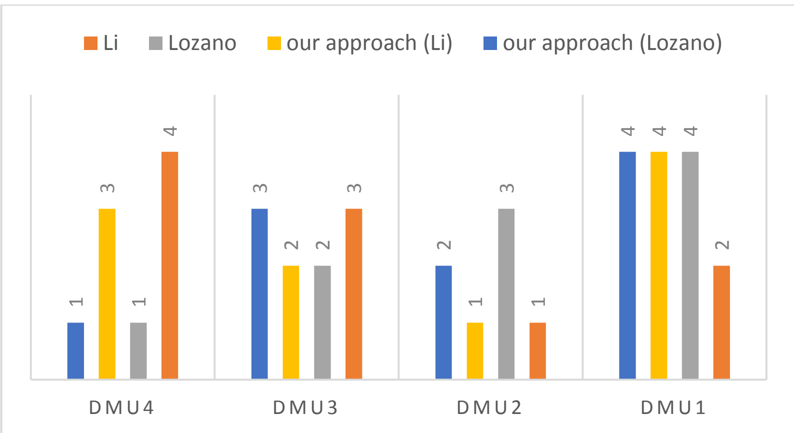
۰/۳۳۳۳	۰/۷۵	$\{B,D\}$
۰	۲	$\{C,D\}$
۰/۸۶۶۶۶	۲/۴۰۶۲۵	$\{A,B,C\}$
۰/۴۶۶۶۶	۲/۰۶۲۴۹	$\{A,B,D\}$
۰	۲/۵	$\{A,C,D\}$
۰/۴۳۳۳۳	۳/۲۸۱۲۴۹	$\{B,C,D\}$
۰/۸۶۶۶۶	۴/۸۷۵	$\{A,B,C,D\}$

پس از به‌کارگیری مدل برنامه‌ریزی خطی (۶)، ارزش هسته‌ای و رتبه‌بندی هر بازیکن باتوجه به مدل لی و لوزانو به شرح زیر آمده است:

جدول ۹. ارزش هسته‌ای و رتبه‌بندی هر DMU کارا

روش لوزانو		روش لی		واحدهای کارا
رتبه‌بندی	ارزش هسته‌ای	رتبه‌بندی	ارزش هسته‌ای	
۴	۰	۴	۰/۵	A
۱	۰/۴۶۶۶۶	۲	۱/۰۶۲۴۹	B
۲	۰/۴	۳	۰/۸۴۷۳	C
۳	۰	۱	۲/۴۶۸۷	D

نمودار زیر رتبه (اهمیت) هر DMU کارا در روش‌های لی، لوزانو و طرح پیشنهادی ما را نشان می‌دهد.



شکل ۱. رتبه هر DMU در روش‌های لی، لوزانو و طرح پیشنهادی ما

۵ نتایج عددی

در این بخش، تحقیق پیشنهادی خود را با استفاده از یک مجموعه داده مربوط به بیست شرکت ژاپنی[۲] در سال ۱۹۹۹ بررسی می‌کنیم. این شرکت‌ها دارای سه ورودی و یک خروجی هستند. در ارزیابی این شرکت‌ها، ۵ شرکت دارای مقدار کارایی یک هستند بنابراین ۵ واحد ۱، ۲، ۶ ، ۸ و ۱۸ کارا هستند. رتبه‌بندی طرح پیشنهادی خود را با رتبه‌بندی به‌دست آمده از مدل‌های لی و لوزانو و روش چن مقایسه می‌کنیم. چن مدلی به منظور حل نشدنی بودن مساله ابرکارایی ارایه داد که مقادیر کارایی در آن به کمک مدل BCC به‌دست می‌آید. لازم به ذکر است نرم افزار استفاده شده در این مقاله MATLAB 2017 می‌باشد.

جدول ۱۰. یک مجموعه داده مربوط به بیست شرکت ژاپنی

خروجی	ورودی‌ها			واحدهای
$Y_{۱j}$	$X_{۳j}$	$X_{۲j}$	$X_{۱j}$	تصمیم گیرنده DMU_j
۱۰۶۷۹۳/۲	۴۰۰۰۰	۵۱۳۷/۹	۵۰۹۰۵/۳	۱
۱۰۶۱۸۴/۱	۵۷۷۵	۲۳۳۳/۸	۵۱۴۳۲/۵	۲
۱۰۴۶۵۶/۳	۳۶۰۰۰	۷۲۵۳/۲	۶۷۵۵۳/۲	۳
۹۷۳۸۷/۶	۱۸۳۸۷۹	۴۷۱۷۷	۱۱۲۶۹۸/۱	۴
۹۱۳۶۱/۷	۵۸۴۴	۲۷۰۴/۳	۴۹۷۴۲/۹	۵
۸۶۹۲۱	۳۰۷۰۰	۴۳۵۱/۵	۴۱۱۶۸/۴	۶
۷۴۳۲۳/۴	۱۳۸۱۵۰	۴۷۴۶۷/۱	۱۳۳۰۰۸/۸	۷
۶۶۱۴۴	۱۹۴۶۱	۱۲۷۴/۴	۳۵۵۸۱/۹	۸
۶۰۹۳۷/۹	۳۲۸۳۵۱	۲۱۹۱۴/۲	۷۳۹۱۷	۹
۵۸۳۶۱/۶	۲۸۲۱۵۳	۲۶۹۸۸/۴	۶۰۶۳۹	۱۰
۵۱۹۰۳	۱۷۷۰۰۰	۱۳۹۳۰/۷	۴۸۱۱۷/۴	۱۱
۵۰۲۶۳/۵	۳۹۴۶۷	۹۵۸۳/۶	۵۲۸۴۲/۱	۱۲
۴۷۵۹۷/۹	۱۱۲۲۰۰	۱۳۴۷۳/۸	۳۸۴۵۵/۸	۱۳
۴۰۴۹۲/۷	۱۹۸۰۰	۸۰۲۳/۳	۴۶۰۱۳	۱۴
۴۰۰۵۰/۳	۱۸۸۰۰۰	۹۵۸۳/۶	۳۹۰۵۲/۲	۱۵
۳۸۸۶۹/۵	۵۰۵۵۸	۱۲۱۵۷/۷	۱۱۰۰۵۵/۸	۱۶
۳۶۳۵۶/۴	۱۵۷۷۷۳	۶۵۱۷/۴	۳۸۰۱۵	۱۷
۳۰۲۰۵/۳	۳۶۵۴	۶۷۶/۱	۱۶۶۹۶	۱۸
۲۹۶۱۲/۲	۳۱۰۰۰	۱۰۸۱۶/۶	۱۷۰۲۳/۶	۱۹
۲۸۹۸۲/۲	۱۱۶۴۷۹	۴۱۲۹/۶	۳۱۹۹۷	۲۰

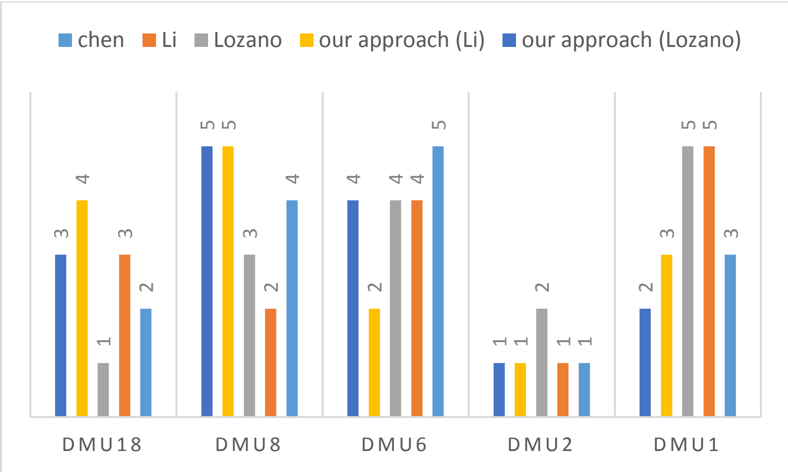
جدول زیر رتبه‌بندی روش‌های لی، لوزانو، چن و روش مطرح شده را نشان می‌دهد. همچنین مقدار ارزش هسته‌ای طرح پیشنهادی را نشان می‌دهد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

جدول ۱۱. رتبه‌بندی روش مطرح شده و روش‌های لی، لوزانو و چن

رتبه‌بندی طرح پیشنهادی روش لی	رتبه‌بندی طرح پیشنهادی روش لوزانو	طرح پیشنهادی روش لی	طرح پیشنهادی روش لوزانو	رتبه‌بندی روش لوزانو	رتبه‌بندی روش لی	رتبه‌بندی روش چن	واحدهای کارا
۲	۳	۱/۵۴۸۳۹۷	۰/۸۵۴۳۲۵	۵	۵	۳	DMU۱
۱	۱	۱/۸۵۴۲۸۱	۰/۸۵۴۳۲۵	۲	۱	۱	DMU۲
۴	۲	۰/۹۸۴۵۶۲۱	۰/۸۳۲۶۴۷	۴	۴	۵	DMU۶
۵	۵	۰/۸۷۵۴۶۱۲	۰/۲۱۵۴۳۸	۳	۲	۴	DMU۸
۳	۴	۱/۱۵۷۹۳۵۱	۰/۵۵۴۷۶۳	۱	۳	۲	DMU۱۸

شکل زیر نمودار رتبه هر DMU کارا درهر یک از روش‌های لی، لوزانو، چن و طرح پیشنهادی را نشان می‌دهد.



شکل ۲. رتبه هر DMU در روش‌های لی، لوزانو، چن و طرح پیشنهادی ما

با توجه به نتایج به‌دست آمده از مثال‌های مطرح شده در این مقاله و برتری مدل SBM و ارزش هسته‌ای نسبت به مدل CCR و ارزش شپلی، طرح پیشنهادی می‌تواند یک رتبه‌بندی قابل قبولی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را بدهد.

٦ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش جدید مبنی بر نظریه بازی همکارانه مدل لی و لوزانو [۲،۱] به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا ارایه شده است. در این روش از مدل غیرشعاعی ورودی محور SBM به منظور محاسبه مقادیر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و از ارزش هسته‌ای به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا استفاده شده است.

مدل لی و لوازنو یک مدل ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها است. مجموعه بازیکنان، در هر دو مدل لی و لوزانو مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا هستند. تابع مشخصه در مدل لی، تغییرات مقدار

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

کارایی واحدهای کارا را پس از حذف یک زیرمجموعه‌ای از واحدهای کارا اندازه‌گیری می‌کند. تابع مشخصه در مدل لوزانو، تغییرات مقدار کارایی واحدهای ناکارا را پس از حذف یک زیرمجموعه‌ای از واحدهای کارا اندازه‌گیری می‌کند. در هر دو مدل لی و لوزانو از مدل ورودی محور CCR و ارزش شپلی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا استفاده شده است.

در یک بازی همکارانه N -نفره، پیچیدگی محاسباتی ارزش شپلی از مرتبه $O(N)$ و ارزش هسته‌ای از مرتبه $O(N^3)$ است که محاسبه ارزش شپلی خیلی ساده‌تر از ارزش هسته‌ای است. از طرفی ارزش هسته‌ای یک مدل برنامه‌ریزی خطی است که تا حد امکان نارضایتی از مشارکت در هر ائتلاف را مینیمم می‌کند. لذا جواب بهتری نسبت به ارزش شپلی ارایه می‌دهد. در این مقاله از پیچیدگی محاسباتی دو ارزش شپلی و هسته‌ای چشم‌پوشی و تنها روی ترتیب رتبه‌بندی واحدهای کارای به‌دست آمده تمرکز کردیم.

این تحقیق برای دو مجموعه داده‌های مختلف مورد بررسی قرارگرفت و نتایج به‌دست آمده از این روش با نتایج به‌دست آمده از روش لی و همکاران و روش لوزانو و همکاران مقایسه شد. مدل‌های CCR و SBM نسبت به تغییر واحد پایدار هستند اما این مدل‌ها نسبت به انتقال پایدار نیستند و مدل SBM نسبت به مدل CCR در ارایه معیارهای مناسب‌تر کارایی به ویژه برای واحدهای کارای ضعیف برتری دارد. از طرفی مدل ارزش هسته‌ای همواره شدنی و دارای جواب منحصر به فرد است. بنابراین روش پیشنهادی مطرح شده در این مقاله می‌تواند یک رتبه‌بندی قابل قبولی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را نتیجه دهد. باتوجه به نتایج و یافته‌های این تحقیق و مواردی که مورد بررسی قرار گرفت، می‌توان استفاده از روش‌های بازی همکارانه غیرائتلافی مانند چانه‌زنی را به عنوان پیشنهادی برای پژوهش‌های آتی مدنظر قرار داد.

منابع

[۳۱] علی نژاد، علیرضا.، زمانی، سیدرضا.، (۱۳۹۵). ارایه رویکردی ترکیبی از تحلیل پوششی داده ها و نظریه بازی ها به منظور رتبه بندی میزان تاثیرگزاری شاخص های کارت امتیازی متوازن در سنجش کارایی سازمان. فصلنامه علمی – پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی، ۱۴ (۴۱) ، ۲۱۵–۱۸۹.

[۶] ظرافت انگیز لنگرودی، مجید.، داودی، سید محمود.، (۱۳۹۱). رتبه‌بندی ورودی ها در تحلیل پوششی داده ها با استفاده از رأی گیری ترجیحی. مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، ۹ (۲)، ۱۲۰–۱۰۱.

[۳۳] عبدلی، ق.، ۱۳۹۰ ، نظریه بازی ها و کاربردهای آن، انتشارات جهاد دانشگاهی تهران، تهران.

[1] Li, Y. ,Xie, J. , Wang, M. , & Liang, L., (2016). Super-efficiency evaluation using a common platform on a cooperative game. European Journal of Operational Research, 884–892.

[2] Hinojosa,M.A. ,Lozano, S. , Borrero, D.V. ,Mármol, A.M., (2017).Ranking efficient DMUs using cooperative game theory. Expert Systems With Applications, 80 (2017) 273–283.

[3] Farrell, M. j., (1957). The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society Series A120(3), 253-290.

[4] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of the decision making units, European Journal of Operational Research 2 (6), 429–444.

[5] Adler, N. Friedman, L Sinuanny-Stren, Z. (2002). Review of ranking methods in the envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 140, 249-265.

[7] Megiddo, N., (1978). Computational complexity of the Game Theory approach to cost allocation for a tree. Mathematics of Operations Research, 3, 3.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]

[8] Cooper, W. W., Seiford, L. M., and Tone, K. (2000). Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver Software.2nd ed. New York: Springer.
[9] Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2006). Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references. Springer Science & Business Media.
[10] Kumar, S., & Gulati, R. (2014). Deregulation and efficiency of Indian banks. New Delhi: Springer India.
[11] Färe, R., & Knox Lovell, C. A. (1978). Measuring the technical efficiency of production. Journal of Economic Theory, 19, 150-162.
[12] Lovell, C. A. K., & Pastor, J. T. (1995). Units invariant and translation invariant DEA models. Operations Research Letters, 18, 147-151.
[13] Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J., 1986. Data envelopment analysis: Critique and extensions. In: Silkman, R.H. (Ed.), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis. Jossey-Bass, San Francisco, CA, pp. 73–105.
[14] Feng, L., Qingyuan, Z,& Liang, L., (2018). Allocating a fixed cost based on a DEA-game cross efficiency approach. Expert Systems With Applications 96, 196–207.
[15] Razavi Hajiagha, S.H., Amoozad Mahdiraji, H., Tavanac, M., Hashemie, S. S, (2018). A novel common set of weights method for multi-period efficiency measurement using mean-variance criteria. Measurement 129, 569–581.
[16] Andersen, P., Petersen, N.C., 1993. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science 39 (10), 1261–1294.
[17] Guo, L., Lee, H.S., Lee, L., (2016). An integrated model for slack-based measure of super-efficiency in additive DEA. Omega, 305-483.
[18] Doyle, J. , & Green, R. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. Journal of the Operational Research Society, 45 , 567–578.
[19] Wang, Y. M. , & Chin, K. S. (2010a). A neutral DEA model for cross-efficiency evalua- tion and its extension. Expert Systems with Applications, 37, 3666–3675.
[20] Alcaraz, J. , Ramón, N. , Ruiz, J. L. , & Sirvent, I. (2013). Ranking ranges in cross-efficiency evaluations. European Journal of Operational Research, 226, 516–521.
[21] Despotis, D. K. (2002). Improving the discriminating power of DEA: Focus on glob- ally efficient units. Journal of the Operational Research Society, 53 , 314–323.
[22] Sun, J., Wu, J., & Guo, D. (2013). Performance ranking of units considering ideal and anti-ideal DMU with common weights. Applied Mathematical Modelling, 37, 6301–6310 .
[23] Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (2016). Common benchmarking and ranking of units with DEA. Omega, 65, 1–9.
[24] Rezaeiani, M. J., Foroughi, A.A., (2018). Ranking efficient decision making units in data envelopment analysis based on reference frontier share. European Journal of Operational Research 264, 665–674
[25] Rezai Balf, F., Zhiani Rezai, H., Jahanshahloo, G. R. , & Hosseinzadeh Lofti, F. (2012). Ranking efficient DMUs using the tchebycheffnorm. Applied Mathematical Modelling, 36 , 46–56.
[26] Liua, W., Wanga,Y.M, (2018). Ranking DMUs by using the upper and lower bounds of the normalized efficiency in data envelopment analysis. Computers & Industrial Engineering 125, 135–143.
[27] Du, J., Liang, L., Yang, F., Bi, G. B. , & Yu, X. B. (2010). A new DEA-based method for fully ranking all decision-making units. Expert Systems, 27 (5), 363–373.
[28] Nakabayashi, K., Tone, K., (2006). Egoist's dilemma: a DEA game, Omega 34, 135-148.
[29] Jie, W., Liang, L., Ying, Z., (2008). Determination of the weights of ultimate cross efficiency based on the solution of nucleolus in cooperative game, systems engineering - Theory & Practice 28(5), 92-97.
[30] Li, Y., Liang, L., (2010). A Shapley value index on the importance of variables in DEA models, Expert systems with Applications, 37, 6287-6292.
[32] Lozano, S., Hinojosa, M., Mármol., A., (2015). Set-valued DEA production games, Omega, 52, 92-100.
[34] Rouse, P., Putterill, M., Ryan, D., (2002). Integrated performance measurement design: insights from an application in aircraft maintenance, Management Accounting Research 13, 229–248.
[35] Harison, G. W. and J. A. List (2004). Field Experiments, Journal of Economic Literature, 42(4).

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.2.8]