

# یک مدل کوادراتیک مخروطی برای طراحی شبکه زنجیره تأمین با در نظر گرفتن هاب، محدودیت ظرفیت، تاخیر فروش از دست رفته

مجتبی صالحی<sup>۱\*</sup>، سید رضا میرمجلسی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

۲- دانشجوی دکترا مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۹ آذر ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۱۲ اسفند ۱۳۹۷

## چکیده

در این مقاله یک مدل ریاضی برای فرمولبندی همزمان تصمیمات مکان‌یابی و کنترل موجودی در یک شبکه زنجیره تأمین چهار سطحی با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ارایه شده است. سطوح در نظر گرفته شده شامل تامین کنندگان، انبارها، هاب‌ها و خودفروشان می‌باشد. مدل ارایه شده به دنبال مینیمم نمودن هزینه‌های مکان‌یابی، حمل و کنترل موجودی است. بدین منظور یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی ارایه می‌شود. مدل ارایه شده سپس به یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط مخروطی تبدیل می‌گردد تا بتوان از سرعت حل بالاتر با استفاده از نرم‌افزارهای تجاری بهره برد. برای مقایسه حالات مختلف کنترل موجودی، استراتژی، تاخیر و فروش از دست رفته مجاز نیز، در نظر گرفته شده است. نتایج محاسبات نشان‌دهنده‌ی استواری مدل در استراتژی‌های مختلف موجودی و زمان حل کوتاه‌تر فرمولبندی کوادراتیک مخروطی می‌باشد. در نتیجه از این نوع فرمولبندی برای حل مسایل با ابعاد بزرگ با استفاده از نرم‌افزارهای تجاری می‌توان استفاده نمود.

**کلمات کلیدی:** مدیریت زنجیره تأمین، مکان‌یابی تسهیلات، کنترل موجودی، برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی.

## ۱ مقدمه

استراتژی مدیریت زنجیره تأمین یکپارچه به شرکت‌ها اجازه می‌دهد تا کارایی را افزایش و اتلاف را کاهش دهند. همچنین پیاده‌سازی موفق زنجیره تأمین یکپارچه منجر به صرفه‌جویی در انرژی و سوخت و حذف فعالیت‌های زاید می‌گردد که در نهایت منجر به سودآوری در سازمان می‌شود [۱]. از سوی دیگر هماهنگی بین بخش‌های مختلف سازمان نیازمند تلاش زیادی می‌باشد. به همین جهت استفاده از مدلی ریاضی برای ارزیابی سودآوری این یکپارچه‌سازی ضروری می‌باشد [۲].

\* عهده‌دار مکاتبات  
آدرس الکترونیکی: m\_salehi61@yahoo.com

مسایل زنجیره تامین بر اساس بازه زمانی تصمیم‌گیری در سه گروه عملیاتی (کوتاه مدت)، تکنیکی، و استراتژیک (بلند مدت) تقسیم بندی می‌شوند. به عنوان مثال یک مساله استراتژیک یا بلندمدت، مکان‌یابی انبار می‌باشد؛ زیرا مکان یک انبار معمولاً دائمی تعیین شده و قابل تغییر نیست. یکی از مسایل استراتژیک در زنجیره تامین طراحی شبکه توزیع می‌باشد که شامل تعیین تعداد بهینه تسهیلات، مکان‌یابی نصب تسهیلات، و تخصیص مشتریان به این تسهیلات و همچنین یافتن بهترین ارتباط بین تسهیلات است [۳]. از طرف دیگر طبق نظر اسچاستر و همکاران [۴] مسایل طراحی شبکه توزیع تکنیکی نیز هستند. زیرا برخی از مسایل تصمیم طراحی شبکه توزیع شامل تعیین کمیت سفارش و یا زمان مناسب بین سفارشات می‌باشند. برخی از محققان نیز مسایل مدیریت موجودی و تصمیمات مربوط به مکان‌یابی تسهیلات را برای کاهش هزینه‌های سربار سیستم یکپارچه کردند [۵].

.۸

یکی از عمدۀ ترین هزینه‌ها در شبکه‌های زنجیره تامین، هزینه حمل و نقل می‌باشد. بنابراین کاهش آن نقش موثری در بهینه‌سازی مدل ایفا می‌کند. یک روش کارا بدین منظور استفاده از هاب می‌باشد [۶]. هاب‌ها محصولات را از چند انبار دریافت می‌کنند و سپس در دسته‌های بزرگ‌تر به خرده‌فروشان ارسال می‌نمایند. به دلیل کاربرد هاب در شبکه‌های حمل و نقل و مخابرات، تحقیقات زیادی در رابطه با مکان‌یابی هاب‌ها در دو دهه گذشته انجام شده است. در این سیستم‌ها جریان بین نقاط که به صورت مبدأ/مقصد هستند جابه‌جا می‌شود و به جای جریان مستقیم بین مبدأ و مقصد از طریق هاب این جریان صورت می‌گیرد. در واقع هر یک از گره‌های شبکه به یک یا چند هاب متصل است و هاب‌ها با کمک این اتصالات و اتصالات بین خودشان جریان کالا و یا اطلاعات را برقرار می‌کنند. با توجه به نحوه تخصیص گره‌های جریان به هاب‌ها، مکان‌یابی هاب شامل تخصیص تکی و تخصیص چندگانه‌می‌باشد. در تخصیص تکی هر گره فقط به یک هاب و در تخصیص چندگانه هر گروه امکان تخصیص به چند هاب را دارد. مکان‌یابی هاب و تعیین ظرفیت آن یک تصمیم استراتژیک و بلند مدت است.

در این مقاله یک مدل ریاضی برای فرمول‌بندی همزمان تصمیمات مکان‌یابی و کنترل موجودی در یک شبکه زنجیره تامین چهار سطحی با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ارایه شده است. مدل ارایه شده به دنبال مینیمم نمودن هزینه‌های مکان‌یابی، حمل و نقل و نگهداری موجودی می‌باشد. بدین منظور یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی ارایه می‌شود. از مشکلات موجود در مدل‌های مکان‌یابی و کنترل موجودی سخت بودن مدل مورد نظر می‌باشد که زمان حل را بالا می‌برد. به عنوان یک نوآوری جدید در این تحقیق علاوه بر ارایه مدلی جدید، مدل ارایه شده به یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط مخروطی تبدیل می‌شود. این فرمول‌بندی ما را قادر می‌سازد تا از سرعت حل بالاتر با استفاده از نرم‌افزارهای تجاری بهره ببریم و بتوانیم مسایل دنیای واقعی را مدل کرده و کل کنیم. برای مقایسه حالات مختلف کنترل موجودی، استراتژی تاخیر و فروش از دست رفته مجاز نیز در نظر گرفته شده است.

در ادامه، مقاله بدین ترتیب ساختار یافته است که در بخش ۲ مروجی بر ادبیات پیشین انجام می‌شود. بخش ۳ به تعریف مساله و فرمول‌بندی می‌پردازد. در بخش ۴ مدل ریاضی عدد صحیح غیرخطی و کوادراتیک

مخروطی همچنین با حالت‌هایی که سفارش تاخیر شده و فروش از دست رفته مجاز باشد بیان شده است. در بخش ۵ نتایج محاسبات و در فصل ۶ نتیجه‌گیری آورده شده است.

## ۲ پیشنهاد تحقیق

داسکین و همکاران [۱۰]، شن و همکاران [۱۱] از اولین محققانی هستند که تصمیمات موجودی و مکان‌یابی را برای کاهش هزینه کل یکپارچه‌سازی کردند. پس از آن محققان دیگری مساله یکپارچه‌سازی تصمیمات کنترل موجودی در مکان‌یابی تسهیلات بدون ظرفیت را در نظر گرفتند. داسکین و همکاران [۱۰] یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح غیر خطی برای مساله مکان‌یابی و کنترل موجودی با در نظر گرفتن ذخیره احتیاطی و هزینه‌های حمل از تامین کننده به مراکز توزیع ارایه نمودند. یک روش ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ برای حل استفاده شد که در سال ۲۰۰۳ توسط شن و همکاران [۱۱] توسعه داده شد. مسایل مشابه توسط شو و همکاران [۱۲]، اشنایدر و همکاران [۱۳] و تئو و شو [۱۴] ارایه شده است.

میراندا و گریدو [۱۵] مسایل فوق را با در نظر گرفتن ظرفیت ثابت در انبارها توسعه دادند. سیلووا و گائو [۱۶] یک مدل مکان‌یابی تسهیلات برای مینیمم کردن هزینه‌های بازپرسازی موجودی و سایر هزینه‌های مکان‌یابی پیشنهاد نمودند. علاوه بر ظرفیت، یکپارچه‌سازی کنترل موجودی و مکان‌یابی تسهیلات نیز مورد توجه قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به ویدیارتی و همکاران [۱۷]، پارک و همکاران [۱۸] اشاره کرد.

جدول ۱. خلاصه مرور ادبیات

مقاله	تابع هدف	مدل	سطوح	روش حل
[۱۰]	مینیمم سازی هزینه	برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی	تأمین کننده، مراکز توزیع، انبار	ابتکاری آزادسازی لاگرانژ
[۱۴]	مینیمم سازی هزینه	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط	انبار، خردهفروش	تولید ستون
[۱۵]	مینیمم سازی هزینه	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط	انبار، خردهفروش	ابتکاری آزادسازی لاگرانژ
[۱۶]	مینیمم سازی هزینه	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط	تأمین کننده، انبار، خرده- فروش	روش جستجوی حریص انتباق پذیر تصادفی <sup>۱</sup>
[۱۷]	مینیمم سازی هزینه	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی	تأمین کننده، انبار، خرده- فروش	تقریب محدب قطعه‌ای <sup>۲</sup> و ابتکاری آزادسازی لاگرانژ
[۱۸]	مینیمم سازی هزینه	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط	تأمین کننده، انبار، مراکز توزیع، خردهفروش	الگوریتم تکاملی ترکیبی
[۱۹]	ماکریم‌سازی سود کل زنجیره تامین	برنامه‌ریزی غیر خطی عدد صحیح مختلط	مراکز جمع آوری و مراکز توزیع	ابتکاری
[۲۰]	مینیمم سازی هزینه و کاهش اثرات	برنامه‌ریزی احتمالی-	تأمین کننده، انبار، مراکز	رویکرد ترکیبی حد پایین و

<sup>۱</sup> - Greedy Randomized Adaptive Search Procedure<sup>۲</sup> - piecewise concave approximation

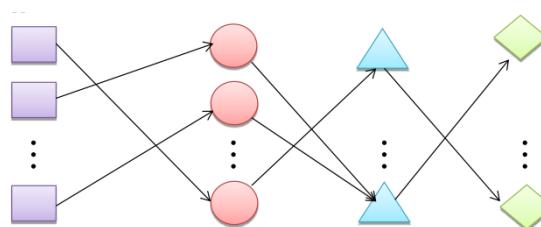
الگوریتم فرالبتکای	توزيع، خردهفروش	تصادفی	زیست محیطی
الگوریتم ژنتیک	توزیع کننده و خرده فروش	مدل چند هدفه غیرخطی	مینیمم سازی هزینه و افزایش سطح [۲۱]
شیوه سازی تبرید و جستجوی مستقیم	مراکز توزیع و خرده فروش	برنامه ریزی غیر خطی عدد صحیح مختلط	مینیمم سازی هزینه [۲۲]

آتامتر ک و همکاران [۱۹] چگونگی فرمول بندی مسایل یکپارچه موجودی- مکان یابی به صورت برنامه- ریزی عدد صحیح مختلط مخروطی را نشان دادند. این مقاله توسعه مقاله فوق با در نظر گرفتن ظرفیت و سیاست- های گوناگون موجودی می باشد. برخی مقالات موجود در ادبیات به صورت خلاصه در جدول ۱ ارایه شده است.

### ۳ تعریف مسئله و فرمول بندی

شکل ۱ ساختار کلی شبکه زنجیره تأمین مورد مطالعه را نشان می دهد.

تامین کننده انبار هاب خرده فروش



شکل ۱. مدل پیشنهادی مساله

مساله پیشنهادی شامل چهار سطح تامین کننده، انبار، هاب و خرده فروش می باشد. هر تامین کننده یک نوع محصول تولید می کند که در انبارها ذخیره می شود. تقاضاهای در هر خرده فروشی مستقل از یکدیگر می باشد. برای افزایش کارایی مدل، محصولات از مسیر هابها از انبار به خرده فروش منتقل می شود [۲۴]. مدل زنجیره تأمین یکپارچه در این مقاله به طور همزمان سه نوع تصمیم را تعیین می کند: ۱- مکان یابی تسهیلات (تعداد و مکان انبارها و هابها) ۲- تخصیص (تخصیص تامین کنندگان به انبارهای مکان یابی شده و همچنین خرده فروشان به انبارهای مکان یابی شده از طریق هابها) و ۳- تصمیمات کنترل موجودی در هر انبار مکان یابی شده. هدف مینیمم کردن هزینه های مکان یابی، حمل و نقل و نگهداری موجودی می باشد.

#### • مفروضات و نشانه گذاری

- ✓ هر انبار یک سیاست موجودی پیوسته را دنبال می کند؛ یعنی زمانی که سطح موجودی در انبارهای کوچک‌تر مساوی نقطه سفارش مجدد شود، یک حجم ثابت سفارش داده می شود.
- ✓ یک موجودی اطمینان در هر انبار در نظر گرفته می شود؛ زیرا سیاست موجودی پیوسته هیچ هزینه کمبود موجودی برای تقاضاهای ارضانشده در نظر نمی گیرد.

- ✓ هر خردهفروش یک تقاضای مستقل غیرقطعی دارد که از توزیع نرمال با میانگین و واریانس معلوم پیروی می‌کند.
- ✓ هزینه ثابت برای سفارش و نگهداری موجودی در هر انبار وجود دارد.
- ✓ هنگامی که انبار سفارشی را درخواست می‌کند یک لید تایم ثابت پیش از رسیدن سفارش بسته به جایگاه تأمین کننده و انبار، سپری می‌شود.
- ✓ هاب‌ها دارای محدودیت ظرفیت می‌باشند.
- ✓ محصولات از انبارها به تأمین کننده گان سفارش داده می‌شود و در نهایت از طریق هاب‌ها به خردهفروشان منتقل می‌گردد.
- ✓ هزینه استقرار ثابت برای ایجاد انبار و هاب وجود دارد.
- ✓ هزینه ثابت حمل و نقل بین تأمین کننده و انبار، هاب و انبار و هاب و خردهفروش وجود دارد.
- ✓ هر خردهفروش تنها از یک هاب و همچنین هر انبار تنها از یک تأمین کننده محصول دریافت می‌کند.

#### • **مجموعه اندیس‌ها**

I مجموعه تأمین کننده‌گان

J مجموعه خردهفروشان

K مجموعه انبارها

H مجموعه هاب‌ها

#### • **پارامترها و نمادگذاری**

$F_k$  هزینه ثابت استقرار برای هر انبار k

$G_k$  هزینه ثابت استقرار برای هر هاب h

$RC_{ik}$  هزینه ثابت حمل برای هر واحد بین تأمین کننده i و انبار k

$TC_{khj}$  هزینه ثابت حمل برای هر واحد بین انبار k و خردهفروش j از طریق هاب h

$H_k$  هزینه نگهداری موجودی به ازای هر محصول در واحد زمان در انبار k

$A_k$  هزینه ثابت سفارش موجودی به ازای هر محصول در واحد زمان در انبار k

$LT_{ik}$  لید تایم سفارش در واحد زمان از تأمین کننده i به انبار k

$d_j$  میانگین تقاضا در واحد زمان برای هر خرده فروش j

$u_j$  واریانس تقاضا در واحد زمان برای هر خرده فروش j

$D_k$  میانگین تقاضا در واحد زمان برای هر انبار k

$U_k$  واریانس تقاضا در واحد زمان برای هر انبار k

$L_k$  لید تایم سفارش در واحد زمان در انبار k

$CAP_h$  ظرفیت هاب h

### • متغیرهای تصمیم

• اگر انبار  $k$  به تأمین کننده ۱ تخصیص داده شود ۱ در غیراینصورت است.

{۱،۰} اگر خرده فروش  $j$  به انبار  $k$  از طریق هاب  $h$  تخصیص داده شود ۱ در غیراینصورت است.

{۱،۰} اگر انبار در سایت  $k$  مستقر شود ۱ در غیراینصورت است.

{۱،۰} اگر هاب در سایت  $h$  مستقر شود ۱ در غیراینصورت است.

$Q_k$  میزان سفارش در انبار  $k$

### • مدل ریاضی عدد صحیح غیرخطی

هزینه کلی در زنجیره تأمین پیشنهادی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} F_k R_k + \sum_{h \in H} G_h Y_h + \sum_{i \in I, k \in K, h \in H, j \in J} R C_{ik} W_{ik} u_j X_{khj} + \sum_{k \in K, h \in H, j \in J} T C_{khj} u_j X_{khj} \\ + \sum_{k \in K} H_k Z_{-\alpha} \sqrt{\sum_{i \in I, h \in H, j \in J} L T_{ik} u_j W_{ik} X_{khj}} + \sum_{k \in K} H_k \frac{Q_k}{\gamma} + \sum_{k \in K} A_k \frac{\sum_{h, j} d_j X_{khj}}{Q_k} \end{aligned} \quad (1)$$

دو عبارت اول هزینه استقرار برای انبار و هاب را به ترتیب نشان می‌دهد. عبارت‌های سوم و چهارم هزینه حمل و نقل بین تأمین کننده و انبار و انبار و خرده فروش را به ترتیب نشان می‌دهد. سه عبارت آخر مربوط به هزینه‌های موجودی می‌باشد که اولی میانگین هزینه نگهداری ذخیره احتیاطی، دومی هزینه نگهداری میانگین موجودی، و سومی هزینه سفارش دهی می‌باشد.

مقدار سفارش بهینه برای انبار  $k$  ( $Q_k^*$ ) از مشتق گرفتن عبارت هزینه کل نسبت به  $Q_k$  به دست می‌آید:

$$\frac{H_k}{\gamma} - \frac{A_k}{Q_k} \sum_{h \in H, j \in J} d_j X_{khj} = 0 \quad (2)$$

از عبارت فوق به دست می‌آید:

$$Q_k^* = \sqrt{\frac{\gamma A_k D_k}{H_k}} \quad (3)$$

با جایگذاری عبارت فوق درتابع هدف، مسئله به صورت زیر در می‌آید (مدل P1):

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k \in K} F_k R_k + \sum_{h \in H} G_h Y_h + \sum_{i \in I, k \in K, h \in H, j \in J} R C_{ik} W_{ik} X_{khj} + \sum_{k \in K, h \in H, j \in J} T C_{khj} u_j X_{khj} + \\ \sum_{k \in K} H_k Z_{-\alpha} \sqrt{\sum_{i \in I, h \in H, j \in J} L T_{ik} u_j W_{ik} X_{khj}} + \sum_{k \in K} \sqrt{\gamma A_k H_k \sum_{h \in H, j \in J} d_j X_{khj}} \end{aligned} \quad (4)$$

به طوری که

$$\sum_{k, h} X_{khj} = 1 \quad \forall j \in J \quad (5)$$

$$\sum_i W_{ik} = R_k \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$X_{khj} \leq R_k \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (7)$$

$$X_{khj} \leq Y_h \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (8)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} X_{khj} \left( \frac{D_k}{\gamma} + Z_{1-\alpha} \sqrt{U_k L_k} \right) \leq CAP_h \quad \forall h \in H \quad (9)$$

$$X_{khj}, W_{ik}, R_k, Y_h, M_{ikhj} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (10)$$

محدودیت اول تضمین می‌کند که هر خردهفروش دقیقاً توسط یک انبار و یک هاب خدمت‌رسانی می‌شود. محدودیت دوم تضمین می‌کند که هر انبار توسط یک تأمین‌کننده خدمت‌رسانی می‌شود. محدودیت سوم و چهارم تضمین می‌کنند که تخصیص خردهفروش ز به انبار  $k$  از طریق هاب  $h$  تنها در صورتی امکان‌پذیر می‌باشد که انبار  $k$  و هاب  $h$  وجود داشته باشند. محدودیت پنجم تضمین می‌کند که مجموع محصولاتی که به یک هاب از کلیه انبارها و خردهفروشان می‌رسد، از ظرفیت آن هاب تجاوز نکند. محدودیت آخر شرط باینری بودن متغیرها را تضمین می‌کند. در ادامه فرمول‌بندی مخروطی مسأله بیان می‌شود.

#### • برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی

در این قسمت مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی P1 به صورت یک مدل عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی (CQMIP) فرمول‌بندی می‌شود. مهم‌ترین مزیت این کار استفاده از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی استاندارد مانند Xpress، CPLEX یا GAMS یا Mosek برای حل مدل می‌باشد. برای آشنایی با برنامه‌ریزی کوادراتیک مخروطی محدب به بن تال و نمیروسکی [25] و علیزاده و گلدفارب [26] مراجعه شود.

اولین گام برای فرمول‌بندی به صورت CQMIP شامل خطی‌سازی عبارت‌های کوادراتیک باینری  $W_{ik} X_{khj}$  که درتابع هدف وجود دارند با استفاده از متغیر باینری جدید  $M_{ikhj}$  می‌باشد؛ بنابراین یک تکنیک خطی‌سازی معروف که معمولاً برای مسایل تخصیص کوادراتیک استفاده می‌گردد برای رفع عبارت  $W_{ik} X_{khj}$  استفاده می‌شود. فرمول‌بندی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k \in K} F_k R_k + \sum_{h \in H} G_h Y_h + \sum_{i \in I, k \in K, h \in H, j \in J} R C_{ik} u_j M_{ikhj} + \sum_{k \in K, h \in H, j \in J} T C_{khj} u_j X_{khj} + \\ \sum_{k \in K} H_k Z_{1-\alpha} \sqrt{\sum_{i \in I, h \in H, j \in J} L T_{ik} u_j M_{ikhj}} + \sum_{k \in K} \sqrt{\gamma A_k H_k \sum_{h \in H, j \in J} d_j X_{khj}} \end{aligned} \quad (11)$$

به طوری که:

$$M_{ikhj} \leq W_{ik} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (12)$$

$$M_{ikhj} \leq X_{khj} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (13)$$

$$M_{ikhj} \geq W_{ik} + X_{khj} - 1 \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (14)$$

$$\sum_{k,h} X_{khj} = 1 \quad \forall j \in J \quad (15)$$

$$\sum_i W_{ik} = R_k \quad \forall k \in K \quad (16)$$

$$X_{khj} \leq R_k \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (17)$$

$$X_{khj} \leq Y_h \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (18)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} X_{khj} \left( \frac{D_k}{\gamma} + Z_{1-\alpha} \sqrt{U_k L_k} \right) \leq CAP_h \quad \forall h \in H \quad (19)$$

$$X_{khj}, W_{ik}, R_k, Y_h, M_{ikhj} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (20)$$

فرمول بندی فوق می‌تواند با تعریف دو متغیر کمکی مثبت  $t_k$  و  $v_k$  برای جایگذاری عبارت‌های غیرخطی ای که درتابع هدف وجود دارد و جایگزینی متغیرهای باینری  $X_{khj}$  و  $M_{ikhj}$  به شکل کوادراتیک (به صورت  $X_{khj}^r = X_{khj}$  و  $M_{ikhj}^r = M_{ikhj}$ ) مجدداً فرمول بندی شود. مدل ایجاد شده تحت عنوان مدل P2 به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k \in K} F_k R_k + \sum_{h \in H} G_h Y_h + \sum_{i \in I, k \in K, h \in H, j \in J} RC_{ik} u_j M_{ikhj} + \sum_{k \in K, h \in H, j \in J} TC_{khj} u_j X_{khj} + \\ \sum_{k \in K} H_k Z_{1-\alpha} t_k + \sum_{k \in K} v_k \sqrt{A_k H_k} \end{aligned} \quad (21)$$

به طوری که:

$$\sum_{i \in I, h \in H, j \in J} LT_{ik} u_j M_{ikhj}^r \leq t_k^r \quad \forall k \in K \quad (22)$$

$$\sum_{h \in H, j \in J} d_j X_{khj}^r \leq v_k^r \quad \forall k \in K \quad (23)$$

$$M_{ikhj} \leq W_{ik} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (24)$$

$$M_{ikhj} \leq X_{khj} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (25)$$

$$M_{ikhj} \geq W_{ik} + X_{khj} - 1 \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (26)$$

$$\sum_{k,h} X_{khj} = 1 \quad \forall j \in J \quad (27)$$

$$\sum_i W_{ik} = R_k \quad \forall k \in K \quad (28)$$

$$X_{khj} \leq R_k \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (29)$$

$$X_{khj} \leq Y_h \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (30)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} X_{khj} \left( \frac{D_k}{\gamma} + Z_{1-\alpha} \sqrt{U_k L_k} \right) \leq CAP_h \quad \forall h \in H \quad (31)$$

$$X_{khj}, W_{ik}, R_k, Y_h, M_{ikhj} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (32)$$

$$t_k, v_k \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (33)$$

مدل P2 یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی می‌باشد. فرمول‌بندی فوق با استفاده از سالورهایی نظیر Mosek یا CPLEX قابل حل می‌باشد.

- برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی برای سفارش‌های تاخیر شده مجاز در حالتی که سفارش‌های تاخیر شده مجاز باشد مقدار سفارش بهینه برای انبار k ( $Q_k^*$ ) از رابطه‌ی (34) به دست می‌آید:

$$Q_k^* = \sqrt{\frac{\gamma A_k D_k}{H_k} \left( \frac{\hat{\pi} + H_k}{\hat{\pi}} \right)} \quad (34)$$

که  $\hat{\pi}$  هزینه تقاضای تاخیر شده می‌باشد. با جایگذاری عبارت فوق درتابع هدف (همانند مدل قبل)، مسأله به شکل زیر در می‌آید (مدل P3):

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k \in K} F_k R_k + \sum_{h \in H} G_h Y_h + \sum_{i \in I, k \in K, h \in H, j \in J} R C_{ik} u_j M_{ikhj} + \sum_{k \in K, h \in H, j \in J} T C_{khj} u_j X_{khj} + \\ \sum_{k \in K} H_k Z_{1-\alpha} t_k + \sum_{k \in K} \sqrt{\frac{D_k A_k H_k}{\gamma} \left( \frac{\hat{\pi} + H_k}{\hat{\pi}} \right)} + \sum_{k \in K} V_k \sqrt{\frac{A_k H_k \hat{\pi}}{\gamma D_k (\hat{\pi} + H_k)}} \end{aligned} \quad (35)$$

به طوری که:

$$\sum_{i \in I, h \in H, j \in J} LT_{ik} u_j M^r_{ikhj} \leq t^r_k \quad \forall k \in K \quad (36)$$

$$\sum_{h \in H, j \in J} d_j^r X^r_{khj} \leq v^r_k \quad \forall k \in K \quad (37)$$

$$M_{ikhj} \leq W_{ik} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (38)$$

$$M_{ikhj} \leq X_{khj} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (39)$$

$$M_{ikhj} \geq W_{ik} + X_{khj} - 1 \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (40)$$

$$\sum_{k,h} X_{khj} = 1 \quad \forall j \in J \quad (41)$$

$$\sum_i W_{ik} = R_k \quad \forall k \in K \quad (42)$$

$$X_{khj} \leq R_k \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (43)$$

$$X_{khj} \leq Y_h \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (44)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} X_{khj} \left( \frac{D_k}{\gamma} + Z_{\gamma-\alpha} \sqrt{U_k L_k} \right) \leq CAP_h \quad \forall h \in H \quad (45)$$

$$X_{khj}, W_{ik}, R_k, Y_h, M_{ikhj} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (46)$$

$$t_k, v_k \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (47)$$

مدل P3 یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی می‌باشد.

- برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی برای فروش از دست رفته مجاز در حالی که فروش از دست رفته مجاز باشد مقدار سفارش بهینه برای انبار  $k$  ( $Q_k^*$ ) از رابطه‌ی (48) به دست می‌آید:

$$Q_k^* = \frac{\hat{\pi} D_k}{H_k} + \sqrt{\left( \frac{\hat{\pi} D_k}{H_k} \right)^2 - \frac{\gamma D_k A_k}{H_k}} \quad (48)$$

با جایگذاری عبارت فوق در تابع هدف، مسئله به شکل زیر در می‌آید (مدل P4):

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k \in K} F_k R_k + \sum_{h \in H} G_h Y_h + \sum_{i \in I, k \in K, h \in H, j \in J} R C_{ik} u_j M_{ikhj} + \sum_{k \in K, h \in H, j \in J} T C_{khj} u_j X_{khj} + \\ \frac{\hat{\pi} D_k}{\gamma} + \\ \sum_{k \in K} H_k Z_{-\alpha} t_k + \sum_{k \in K} \sqrt{\left(\frac{\hat{\pi} D_k}{\gamma}\right)^2 - \frac{D_k A_k H_k}{\gamma}} + \sum_{k \in K} V_k \frac{A_k}{\frac{\hat{\pi} D_k}{H_k} + \sqrt{\left(\frac{\hat{\pi} D_k}{H_k}\right)^2 - \frac{\gamma D_k A_k}{H_k}}} \end{aligned} \quad (49)$$

به طوری که:

$$\sum_{i \in I, h \in H, j \in J} L T_{ik} u_j M_{ikhj}^{\gamma} \leq t_k^{\gamma} \quad \forall k \in K \quad (50)$$

$$\sum_{h \in H, j \in J} d_j^{\gamma} X_{khj}^{\gamma} \leq V_k^{\gamma} \quad \forall k \in K \quad (51)$$

$$M_{ikhj} \leq W_{ik} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (52)$$

$$M_{ikhj} \leq X_{khj} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (53)$$

$$M_{ikhj} \geq W_{ik} + X_{khj} - 1 \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (54)$$

$$\sum_{k,h} X_{khj} = 1 \quad \forall j \in J \quad (55)$$

$$\sum_i W_{ik} = R_k \quad \forall k \in K \quad (56)$$

$$X_{khj} \leq R_k \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (57)$$

$$X_{khj} \leq Y_h \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (58)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} X_{khj} \left( \frac{D_k}{\gamma} + Z_{-\alpha} \sqrt{U_k L_k} \right) \leq CAP_h \quad \forall h \in H \quad (59)$$

$$X_{khj}, W_{ik}, R_k, Y_h, M_{ikhj} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (60)$$

$$t_k, V_k \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (61)$$

مدل P4 یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی می‌باشد.

• برنامه ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی با سفارش‌های تاخیر شده مجاز

همان‌طور که بیان شد، در حالتی که سفارش‌های تاخیر شده مجاز باشد مقدار سفارش بهینه برای انبار  $k$  ( $Q_k^*$ ) از رابطه‌ی (۶۲) به دست می‌آید:

$$Q_k^* = \sqrt{\frac{\gamma A_k D_k}{H_k} \left( \frac{\hat{\pi} + H_k}{\hat{\pi}} \right)} \quad (62)$$

با جایگذاری عبارت فوق در تابع هدف مساله اصلی، مسئله به شکل زیر در می‌آید (مدل P5):

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k \in K} F_k R_k + \sum_{h \in H} G_h Y_h + \sum_{i \in I, k \in K, h \in H, j \in J} RC_{ik} u_j W_{ik} X_{khj} + \sum_{k \in K, h \in H, j \in J} TC_{khj} u_j X_{khj} + \\ \sum_{k \in K} H_k Z_{\gamma-\alpha} \sqrt{\sum_{i \in I, h \in H, j \in J} LT_{ik} u_j W_{ik} X_{khj}} + \sum_{k \in K} \sqrt{\frac{D_k A_k H_k}{\gamma} \left( \frac{\hat{\pi} + H_k}{\hat{\pi}} \right)} + \sum_{k \in K} \left( \sqrt{\frac{A_k H_k \hat{\pi}}{\gamma D_k (\hat{\pi} + H_k)}} \sum_{h \in H, j \in J} d_j^r X_{khj} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

به طوری که

$$\sum_{k,h} X_{khj} = 1 \quad \forall j \in J \quad (64)$$

$$\sum_i W_{ik} = R_k \quad \forall k \in K \quad (65)$$

$$X_{khj} \leq R_k \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (66)$$

$$X_{khj} \leq Y_h \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (67)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} X_{khj} \left( \frac{D_k}{\gamma} + Z_{\gamma-\alpha} \sqrt{U_k L_k} \right) \leq CAP_h \quad \forall h \in H \quad (68)$$

$$X_{khj}, W_{ik}, R_k, Y_h \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (69)$$

مدل P5 یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی می‌باشد.

• برنامه ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی با فروش از دست رفته مجاز

همان‌طور که بیان شد، در حالتی که فروش از دست رفته مجاز می‌باشد مقدار سفارش بهینه برای انبار  $k$  ( $Q_k^*$ ) از رابطه‌ی (۷۰) به دست می‌آید:

$$\mathcal{Q}_k^* = \frac{\hat{\pi}D_k}{H_k} + \sqrt{\left(\frac{\hat{\pi}D_k}{H_k}\right)^r - \frac{\gamma D_k A_k}{H_k}} \quad (V0)$$

با جایگذاری عبارت فوق در تابع هدف مسئله اصلی، مسئله به شکل زیر در می‌آید (مدل 6):

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k \in K} F_k R_k + \sum_{h \in H} G_h Y_h + \sum_{i \in I, k \in K, h \in H, j \in J} RC_{ik} u_j W_{ik} X_{khj} + \sum_{k \in K, h \in H, j \in J} TC_{khj} u_j X_{khj} + \\ \sum_{k \in K} H_k Z_{\alpha} \sqrt{\sum_{i \in I, h \in H, j \in J} LT_{ik} u_j W_{ik} X_{khj}} + \sum_{k \in K} \left( \frac{\hat{\pi}D_k}{H_k} + \sqrt{\left(\frac{\hat{\pi}D_k}{H_k}\right)^r - \frac{\gamma D_k A_k H_k}{H_k}} \right) + \\ \sum_{k \in K} \left( \frac{A_k}{\frac{\hat{\pi}D_k}{H_k} + \sqrt{\left(\frac{\hat{\pi}D_k}{H_k}\right)^r - \frac{\gamma D_k A_k}{H_k}}} \sqrt{\sum_{h \in H, j \in J} d_j^r X_{khj}} \right) \end{aligned} \quad (V1)$$

به طوری که:

$$\sum_{k,h} X_{khj} = 1 \quad \forall j \in J \quad (V2)$$

$$\sum_i W_{ik} = R_k \quad \forall k \in K \quad (V3)$$

$$X_{khj} \leq R_k \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (V4)$$

$$X_{khj} \leq Y_h \quad \forall k \in K, h \in H, j \in J \quad (V5)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} X_{khj} \left( \frac{D_k}{\gamma} + Z_{\alpha} \sqrt{U_k L_k} \right) \leq CAP_h \quad \forall h \in H \quad (V6)$$

$$X_{khj}, W_{ik}, R_k, Y_h \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, h \in H, k \in K, j \in J \quad (V7)$$

مدل P6 یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی می‌باشد.

#### ۴ نتایج محاسباتی

مدل P1 (مدل پایه)، P5 و P6 از آنجایی که یک مدل غیرخطی هستند، با استفاده از سالور BARON حل شده است؛ اما مدل‌های P2 تا P4 که به فرم برنامه‌ریزی کوادراتیک مخروطی تبدیل شده‌اند، قابلیت حل با استفاده از CPLEX را دارا می‌باشند. همان‌طور که بیان شد، مهم‌ترین مزیت فرمول‌بندی کوادراتیک مخروطی،

قابلیت حل آن با استفاده از نرم افزارهای بهینه سازی استاندارد همچون CPLEX می باشد. برای حل مسایل از یک سیستم با مقدار حافظه 6GB و COREi7 CPU استفاده شده است. مقادیر پارامترهای مدل از مقاله های پارک و همکاران [۲۳] و نازیک و ترنکوایست [۲۷] استخراج شده است (جدول ۲).

**جدول ۲.** مقادیر پارامترهای مدل

U[۳۰۰۰,۳۵۰۰]	F <sub>k</sub>
U[۲۰۰۰,۲۵۰۰]	G <sub>h</sub>
U[۱۰۰,۱۲۰]	R <sub>C<sub>ik</sub></sub>
U[۸۰,۹۵]	T <sub>C<sub>khj</sub></sub>
U[۱۰,۱۵]	H <sub>k</sub>
U[۱۵۰,۱۸۰]	A <sub>k</sub>
U[۱۵,۳۰]	L <sub>T<sub>ik</sub></sub>
U[۱۰,۲۰]	d <sub>j</sub>
U[۳,۱۵]	u <sub>j</sub>
U[۱۰,۲۰]	D <sub>k</sub>
U[۱۵,۳]	U <sub>k</sub>
U[۲۰,۳۰]	L <sub>k</sub>
U[۱۵,۲۲۰]	CAP <sub>h</sub>
U[۵,۷۰]	$\hat{\pi}$

نتایج زمان های حل (ثانیه) برای مسایل نمونه در ابعاد مختلف برای مدل های غیرخطی (P1، P5 و P6) در جدول ۳ نشان داده شده است.

**جدول ۳.** زمان حل مسایل نمونه برای مدل های غیرخطی (ثانیه)

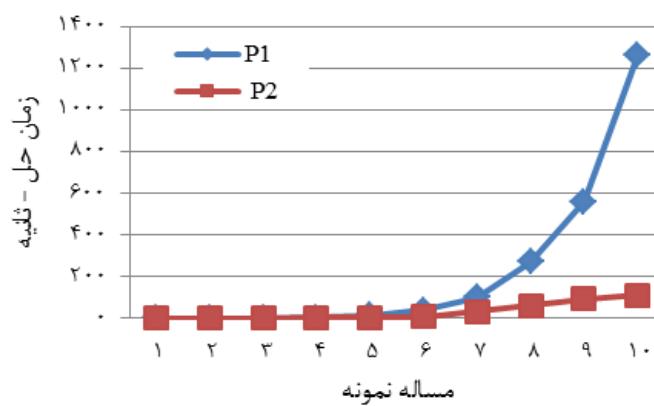
P6	P5	P1	[j, h, k, i]	ردیف
۰/۲	۰/۲۵	۰/۲	[۲,۲,۲,۳]	۱
۰/۲۵	۰/۳	۰/۳	[۳,۳,۲,۳]	۲
۰/۸۵	۰/۸	۰/۵	[۴,۳,۳,۳]	۳
۳	۴	۴	[۵,۴,۳,۴]	۴
۱۲	۱۷	۱۷	[۶,۴,۴,۴]	۵
۱۰۳	۸۴	۴۱	[۸,۴,۴,۴]	۶
۱۶۸	۱۱۶	۱۰۲	[۱۰,۴,۴,۴]	۷
۴۰۹	۲۹۱	۲۷۱	[۱۲,۵,۴,۴]	۸
۷۲۶	۵۹۲	۵۶۲	[۱۵,۵,۴,۶]	۹
۱۵۹۸	۱۴۰۶	۱۲۶۵	[۱۸,۶,۴,۸]	۱۰
۳۲۰۵	۲۸۱۰	۲۶۴۰	[۲۰,۷,۵,۱۰]	۱۱
۸۶۱۵	۷۷۳۵	۶۹۵۵	[۳۰,۸,۵,۱۰]	۱۲
۲۳۴۲۱	۱۸۷۳۰	۱۵۶۷۱	[۳۰,۸,۸,۱۰]	۱۳
۸۶۴۰۰>	۸۶۴۰۰>	۸۶۴۰۰>	[۱۰۰,۱۰,۱۰,۱۰]	۱۴
۸۶۴۰۰>	۸۶۴۰۰>	۸۶۴۰۰>	[۲۰۰,۱۰,۱۰,۱۰]	۱۵

نتایج زمان‌های حل (ثانیه) برای مسایل نمونه در ابعاد مختلف برای مدل‌های کوادراتیک مخروطی (P2، P3 و P4) در جدول ۴ نشان داده شده است.

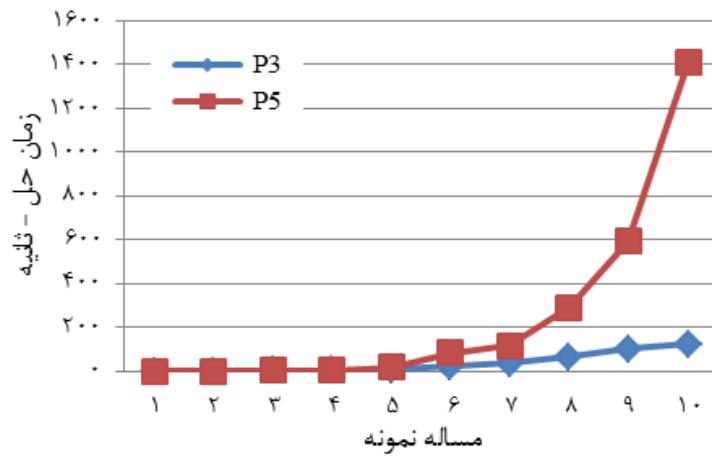
**جدول ۴.** زمان حل مسایل نمونه برای مدل‌های کوادراتیک مخروطی (ثانیه)

P4	P3	P2	[j, h, k, i]	ردیف
۰/۴	۰/۵	۰/۴	[۲,۲,۲,۳]	۱
۰/۵	۰/۶	۰/۶	[۳,۳,۲,۳]	۲
۱/۷	۱/۶	۱	[۴,۳,۳,۳]	۳
۲/۵	۳	۳	[۵,۴,۳,۴]	۴
۳/۵	۵	۵	[۶,۴,۴,۴]	۵
۲۳	۱۹	۹	[۸,۴,۴,۴]	۶
۵۲	۳۶	۳۲	[۱۰,۴,۴,۴]	۷
۹۳	۶۶	۶۲	[۱۲,۵,۴,۴]	۸
۱۲۲	۹۹	۹۴	[۱۵,۵,۴,۶]	۹
۱۴۱	۱۲۴	۱۱۲	[۱۸,۶,۴,۸]	۱۰
۱۶۷	۱۴۶	۱۳۸	[۲۰,۷,۵,۱۰]	۱۱
۱۸۸	۱۶۹	۱۵۲	[۳۰,۸,۵,۱۲]	۱۲
۳۱۲	۲۹۸	۲۸۳	[۳۰,۸,۸,۱۰]	۱۳
۴۱۲۸	۳۸۳۱	۳۶۵۰	[۱۰۰,۱۰,۱۰,۱۰]	۱۴
۱۴۲۲۱	۱۳۸۴۱	۱۳۱۶۵	[۲۰۰,۱۰,۱۰,۱۰]	۱۵

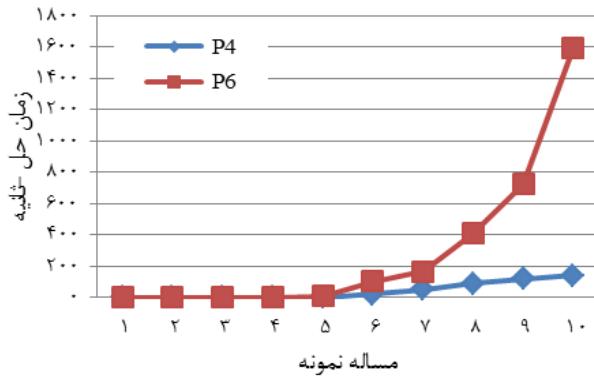
همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سایز مساله زمان حل در مدل‌های P1، P5 و P6 که با استفاده از سالور حل شده است، با شدت بیشتری افزایش می‌یابد. این در حالی است که مدل‌های P2 تا P4 که به فرم کوادراتیک مخروطی می‌باشند و قابلیت حل با CPLEX را دارند، در زمان‌هایی کوتاه‌تر به جواب بهینه دست پیدا می‌کنند. شکل‌های ۲، ۳ و ۴ این موضوع را واضح‌تر نشان می‌دهند.



شکل ۲. زمان حل در مقابل مساله نمونه برای مدل‌های پایه و کوادراتیک مخروطی در حالت پایه



شکل ۳. زمان حل در مقابل مسئله نمونه مدل‌های پایه و کوادراتیک مخروطی در حالت تاخیر مجاز



شکل ۴. زمان حل در مقابل مسئله نمونه مدل‌های پایه و کوادراتیک مخروطی در حالت فروش از دست رفته همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سایز مسئله میزان افزایش زمان حل در مدل‌های غیرخطی بیشتر از مدل‌های کوادراتیک مخروطی در کلیه استراتژی‌های موجودی (تاخیر و فروش از دست رفته مجاز) می‌باشد.

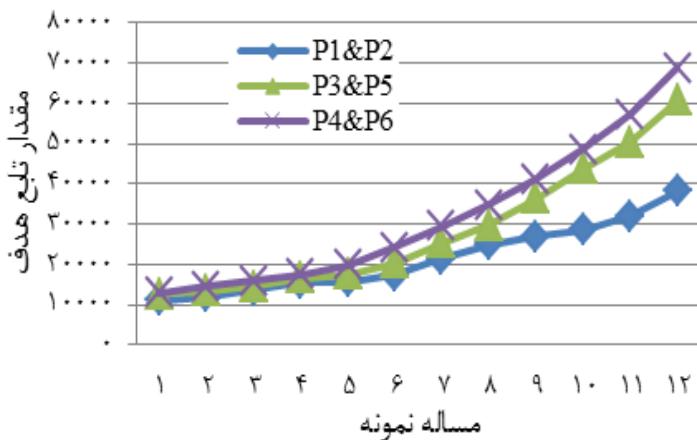
جدول ۵ مقادیر تابع هدف را برای مسائل نمونه مدل‌های ارایه شده نشان می‌دهد.

جدول ۵. مقدار تابع هدف مسائل نمونه

P6	P5	P4	P3	P2	P1	[j, h, k, i]	ردیف
12970	12782	12970	12782	11094	11094	[202,2,2,3]	1
14582	13317	14582	13317	12034	12034	[303,2,2,3]	2
15916	14439	15916	14439	13717	13717	[403,3,2,3]	3
17483	16556	17483	16556	15423	15423	[50,4,3,4]	4
19918	17593	19918	17593	15592	15592	[60,4,4,4]	5
24093	20181	24093	20181	17416	17416	[80,4,4,4]	6
29413	25347	29413	25347	21527	21527	[100,4,4,4]	7
34762	29779	34762	29779	24809	24809	[120,4,4,4]	8

۴۱۰۸۴	۳۶۴۲۳	۴۱۰۸۴	۳۶۴۲۳	۲۶۸۴۲	۲۶۸۴۲	[۱۵۵،۴،۶]	۹
۴۸۶۵۵	۴۳۷۴۹	۴۸۶۵۵	۴۳۷۴۹	۲۸۵۷۱	۲۸۵۷۱	[۱۸،۶،۴،۸]	۱۰
۵۷۳۸۵	۵۰۴۸۸	۵۷۳۸۵	۵۰۴۸۸	۳۲۰۴۶	۳۲۰۴۶	[۲۰،۷،۵،۱۰]	۱۱
۶۸۸۲۱	۶۰۶۴۵	۶۸۸۲۱	۶۰۶۴۵	۳۸۳۲۳	۳۸۳۲۳	[۳۰،۸،۵،۱۲]	۱۲
۹۱۸۶۳	۷۳۴۵۱	۹۱۸۶۳	۷۳۴۵۱	۴۵۷۶۵	۴۵۷۶۵	[۳۰،۸،۸،۱۰]	۱۳
-	-	۲۰۸۹۵۶	۱۹۱۴۶	۱۱۲۳۱	-	[۱۰۰،۱۰۰،۱۰۰،۱۰]	۱۴
-	-	۲۵۶۷۸۹	۲۳۴۱۲۷	۱۵۸۷۴۶	-	[۲۰۰،۱۰۰،۱۰۰،۱۰]	۱۵

نتایج نشان می‌دهند که مقدار تابع هدف در مدل‌های با فروش از دست رفته مجاز بیشتر از سایر مدل‌ها می‌باشد (شکل ۵).



شکل ۵. مقادیر تابع هدف در مقابل مساله نمونه همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل‌های (P1 و P2) که هر دو یک مساله؛ اما با فرمول‌بندی‌های متفاوت (غیرخطی و کوارداتیک محروطی) می‌باشند، مقادیر تابع هدف یکسانی را نتیجه می‌دهند. این موضوع برای مدل‌های (P3 و P5) و (P4 و P6) نیز صادق می‌باشد.

## ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل ریاضی برای فرمول‌بندی همزمان تصمیمات مکان‌یابی و کنترل موجودی در یک شبکه زنجیره تامین چهار سطحی با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ارایه شده است. سطوح در نظر گرفته شده شامل تامین کنندگان، انبارها، هاب‌ها و خردۀ‌فروشان می‌باشد. مدل زنجیره تامین یکپارچه در این مقاله به طور همزمان سه نوع تصمیم را تعیین می‌کند: ۱- مکان‌یابی تسهیلات (تعداد و مکان انبارها و هاب‌ها) ۲- تخصیص (تخصیص تامین کنندگان به انبارهای مکان‌یابی شده و همچنین خردۀ‌فروشان به انبارهای مکان‌یابی شده از طریق هاب‌ها) و ۳- تصمیمات کنترل موجودی در هر انبار مکان‌یابی شده. هدف مینیمم کردن هزینه‌های مکان‌یابی، حمل و نقل و موجودی می‌باشد. بدین منظور یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی ارایه می‌شود. مدل ارایه شده

سپس به یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط کوادراتیک مخروطی تبدیل می‌شود تا بتوان از سرعت حل بالاتر با استفاده از CPLEX بهره برد. برای مقایسه حالات مختلف کنترل موجودی، استراتژی تاخیر و فروش از دست رفته مجاز نیز در نظر گرفته شده است. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که فرمول‌بندی کوادراتیک مخروطی فوق؛ حتی با در نظر گرفتن سیاست‌های مختلف موجودی، در زمان کوتاهی حل می‌شود. به عنوان یک نوآوری جدید در این تحقیق علاوه بر ارایه مدلی جدید، مدل ارایه شده به یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط مخروطی تبدیل می‌شود. این فرمول‌بندی ما را قادر می‌سازد تا از سرعت حل بالاتر با استفاده از نرم‌افزارهای تجاری بهره ببریم و بتوانیم مسایل دنیای واقعی را مدل کرده و کل کنیم. رویکرد مورد استفاده برای تبدیل به مدل مخروطی در مقالات مشابه نیز قابل کاربرد است. به عنوان پیشنهاد آتی می‌توان عدم قطعیت را به گونه‌ای که فرم کوادراتیک مخروطی حفظ گردد، به مدل افزود.

## منابع

[۲۲] حسینی، ز.، اسماعیلی، م.، قاسمی‌یقین، ر.، (۱۳۹۱) ارایه مدل بهینه‌سازی چند هدفه برای تصمیمات توأم موجودی و قیمت‌گذاری در حالت زمان‌های تدارک احتمالی (نمایی و یکنواخت) با استفاده از الگوریتم ژنتیک. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن. ۱۱(۱).

- [1] Mentzer, J. T., DeWitt, W., Keebler, J. S., Min, S., Nix, N. W., Smith, C. D. and Zacharia, Z. G. (2001) DEFINING SUPPLY CHAIN MANAGEMENT, Journal of Business Logistics. Blackwell Publishing Ltd, 22(2), 1–25.
- [2] K Tan, K. C. (2001) A framework of supply chain management literature, European Journal of Purchasing & Supply Management, 7(1), 39–48.
- [3] Puga, M. S., Minner, S., & Tancrez, J. S. (2018). Two-stage supply chain design with safety stock placement decisions. International Journal of Production Economics.
- [4] Schuster, M., Minner, S., & Tancrez, J. S. (2017). Two-stage supply chain design with safety stock placement decisions(No. 2017001). Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE).
- [5] Mousavi, S. M., Bahreininejad, A., Musa, S. N., & Yusof, F. (2017). A modified particle swarm optimization for solving the integrated location and inventory control problems in a two-echelon supply chain network. Journal of intelligent manufacturing, 28(1), 191–206.
- [6] Qu, H., Wang, L., & Liu, R. (2015). A contrastive study of the stochastic location-inventory problem with joint replenishment and independent replenishment. Expert Systems with Applications, 42(4), 2061–2072.
- [7] Farahani, R. Z., Rashidi Bajgan, H., Fahimnia, B., & Kaviani, M. (2015). Location-inventory problem in supply chains: a modelling review. International Journal of Production Research, 53(12), 3769–3788.
- [8] Ahmadzadeh, E., & Vahdani, B. (2017). A location-inventory-pricing model in a closed loop supply chain network with correlated demands and shortages under a periodic review system. Computers & Chemical Engineering, 101, 148–166.
- [9] Shahabi, M., & Unnikrishnan, A. (2014). Robust hub network design problem. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 70, 356–373.
- [10] Daskin, M. S., Coullard, C. R. and Shen, Z.-J. M. (2002) An Inventory-Location Model: Formulation, Solution Algorithm and Computational Results, Annals of Operations Research. Kluwer Academic Publishers, 110(1/4), 83–106.
- [11] Shen, Z.-J. M., Coullard, C. and Daskin, M. S. (2003) A Joint Location-Inventory Model, Transportation Science, 37(1), 40–55.
- [12] Shu, J., Teo, C.-P. and Shen, Z.-J. M. (2005) Stochastic Transportation-Inventory Network Design Problem, Operations Research. INFORMS, 53(1), 48–60.
- [13] Snyder, L. V., Daskin, M. S. and Teo, C.-P. (2007) The stochastic location model with risk pooling, European Journal of Operational Research, 179(3), 1221–1238.

- [14] Teo, C.-P. and Shu, J. (2004) Warehouse-Retailer Network Design Problem, *Operations Research*. INFORMS, 52(3), 396–408.
- [15] Miranda, P. A. and Garrido, R. A. (2004) Incorporating inventory control decisions into a strategic distribution network design model with stochastic demand, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 40(3), 183–207.
- [16] Silva, F. and Gao, L. (no date) A Joint Replenishment Inventory-Location Model, *Networks and Spatial Economics*. Springer US, 13(1), 107–122.
- [17] Vidyarthi, N., Çelebi, E., Elhedhli, S. and Jewkes, E. (2007) Integrated Production-Inventory-Distribution System Design with Risk Pooling: Model Formulation and Heuristic Solution, *Transportation Science*, 41(3), 392–408.
- [18] Lin, L., Gen, M. and Wang, X. (2009) Integrated multistage logistics network design by using hybrid evolutionary algorithm, *Computers & Industrial Engineering*, 56(3), 854–873.
- [19] Kaya, O., & Urek, B. (2016) A mixed integer nonlinear programming model and heuristic solutions for location, inventory and pricing decisions in a closed loop supply chain. *Computers & Operations Research*, 65, 93-103.
- [20] Zhalechian, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., Zahiri, B., & Mohammadi, M. (2016). Sustainable design of a closed-loop location-routing-inventory supply chain network under mixed uncertainty. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 89, 182-214.
- [21] Diabat, A., Dehghani, E., & Jabbarzadeh, A. (2017). Incorporating location and inventory decisions into a supply chain design problem with uncertain demands and lead times. *Journal of Manufacturing Systems*, 43, 139-149.
- [23] Park, S., Lee, T.-E. and Sung, C. S. (2010) A three-level supply chain network design model with risk-pooling and lead times, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 46(5), 563–581.
- [24] Cheong, M. L., Bhatnagar, R. and Graves, S. C. (2007) Logistics Network Design with Supplier Consolidation Hubs and Multiple Shipment Options, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 3(1).
- [25] Ben-Tal, A., Chung, B. Do, Mandala, S. R. and Yao, T. (2011) Robust optimization for emergency logistics planning: Risk mitigation in humanitarian relief supply chains, *Transportation Research Part B: Methodological*, 45(8), 1177–1189.
- [26] Alizadeh, F. and Goldfarb, D. (2003) Second-order cone programming, *Mathematical Programming*. Springer-Verlag, 95(1), 3–51.
- [27] Nozick, L. K. and Turnquist, M. A. (2001) Inventory, transportation, service quality and the location of distribution centers, *European Journal of Operational Research*, 129(2), 362–371.