مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره چهارم (پیاپی ۵۵)، زمستان ۹۶، ص ص ۴۴-۳۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تصمیم‌سازی بهینه در مدل گاما گزینش‌شده تحت یک تابع زیان تعمیم‌یافته

آزاده کیاپور*[۱]، مهران نقی‌زاده قمی[۲]
۱-استادیار، دانشگاه آزاد، واحد بابل، دانشکده علوم پایه، گروه آمار
۲-استادیار، دانشگاه مازندران، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

رسید مقاله: ۱۶ اردیبهشت ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۱۹ مهر ۱۳۹۶

چکیده

فرض کنید Π_1 و Π_2 دو جامعه گامای مستقل باشند که در آن Π_i دارای پارامتر مقیاس نامعلوم θ_i و پارامتر شکل معلوم و مشترک α باشد. با فرض این‌که X_1 و X_2 به‌طور تصادفی به ترتیب از جوامع Π_1 و Π_2 استخراج شوند و جامعه متناظر با مشاهده $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ یا $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$ گزینش شود. هدف از این مقاله، یافتن تصمیم‌های بهینه برای پارامترهای مقیاس θ_M و θ_J از جامعه گامای گزینش‌شده تحت یک تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم‌یافته می‌باشد. به این منظور، تصمیم‌های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی به فرم $cX_{(2)}$ یا $cX_{(1)}$ را در زیرکلاسی از تصمیم‌های ناوردای θ_M یا θ_J به‌دست می‌آوریم. همچنین تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم‌یافته θ_M و θ_J را به‌دست آورده و نشان می‌دهیم که تصمیم‌های خطی پذیرفتنی هستند. نتایج به‌دست آمده را برای داده‌های سانسورشده و همچنین برای توزیع‌های رایلی و وایبول به‌کار می‌بریم.

کلمات کلیدی: تصمیم پذیرفتنی، توزیع گاما، داده‌های سانسورشده.

۱ مقدمه

در استنباط آماری و در مقوله برآورد پارامترهای یک یا چند جامعه، معمولاً پارامترهایی که قرار است برآورد شوند، قبل از جمع‌آوری نمونه، مشخص هستند و پس از جمع‌آوری نمونه، با استفاده از روش‌های معمول برآوردیابی مانند روش‌های گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی، برآورد می‌شوند[۱]. همچنین تصمیم‌هایی مانند تصمیم‌های پذیرفتنی و مینیماکس را برای آن به‌دست می‌آورند؛ ولی در بعضی از مسائل آماری، پارامتر مورد نظر برای برآورد، قبل از جمع‌آوری نمونه، مشخص نیست و بر اساس نمونه‌هایی که برای استنباط مورد استفاده قرار می‌گیرند، مشخص (گزینش) می‌شود. فرض کنید کارخانه‌ای k ماشین مختلف تولید می‌کند و

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: kiapour@baboliau.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.1.2]

می‌خواهد ماشینی با متوسط طول عمر بالا به خریدار بفروشد؛ بنابراین خریدار، علاقه مند است برآوردی از متوسط طول عمر ماشین خریداری شده از کارخانه را در اختیار داشته باشد.

در دهه‌های اخیر، مساله برآورد پارامترهای جامعه گزینش‌شده مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. خوانندگان علاقه مند می‌توانند به میسرا و همکاران [۲]، کومار و همکاران [۳] و نقی‌زاده قمی و همکاران [۴] مراجعه نمایند.

برای فرمول‌بندی مساله، فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل مستخرج از جامعه‌های Π_1 و Π_2 با توزیع گاما به ترتیب با پارامترهای مقیاس θ_1 و θ_2 و پارامتر شکل مشترک و معلوم α با تابع چگالی احتمال زیر:

$$f(x\mid\theta_i,\alpha)=\frac{1}{\theta_i^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta_i}},\ x>0,\ \alpha>0,\ \theta_i>0,\ i=1,2. \tag{۱}$$

و $X_{(1)}=\min(X_1,X_2)$ و $X_{(2)}=\max(X_1,X_2)$ باشند. جامعه متناظر با بزرگ‌ترین (کوچک‌ترین) پارامتر مقیاس، بهترین جامعه نامیده می‌شود. برای گزینش بهترین جامعه، قاعده گزینش طبیعی به این صورت است که جامعه متناظر با $X_{(2)}$ ($X_{(1)}$) گزینش می‌شود. پارامترهای متناظر با بهترین جامعه عبارتند از:

$$\theta_M=\begin{cases}\theta_1 & X_1\ge X_2\\ \theta_2 & X_1<X_2\end{cases},\qquad \theta_J=\begin{cases}\theta_1 & X_1\le X_2\\ \theta_2 & X_1>X_2\end{cases} \tag{۲}$$

لازم به ذکر است که برآوردگرهای $X_{(1)}$ و $X_{(2)}$ به ترتیب برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی برای پارامترهای θ_J و θ_M هستند.

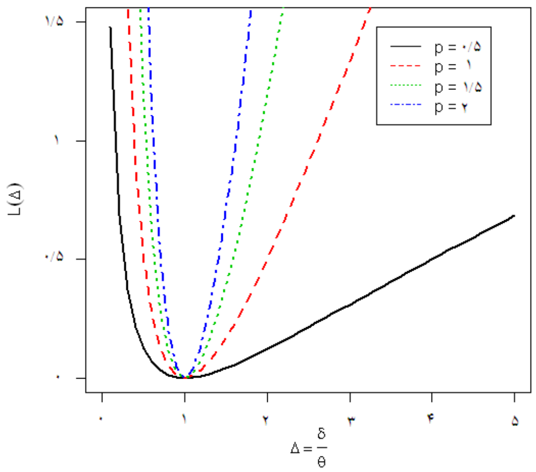
برای فهم بهتر مساله، دو دستگاه را در نظر بگیرید که به‌طور مستقل قطعاتی با طول عمر θ_1 و θ_2 تولید می‌کنند. فرض کنید X_1 و X_2 به ترتیب طول عمر یک قطعه انتخابی به‌طور تصادفی از دستگاه شماره ۱ و ۲ باشند. اگر $X_1\ge X_2$، آن‌گاه θ_1 و در غیر این‌صورت θ_2 پارامتر جامعه گزینش‌شده خواهد بود. بنابراین θ_M که یک پارامتر تصادفی است، پارامتر جامعه گزینش‌شده خواهد بود و مهندس کارخانه علاقه مند به برآورد آن است.

مساله برآورد پارامترهای جامعه گامای گزینش‌شده توسط ولایسامی و شارما [۵] و ولایسامی [۶] تحت تابع زیان توان دوم خطا آغاز شد. میسرا و همکاران [۷] نتایج پذیرفتنی و ناپذیرفتنی ولایسامی و شارما [۵] را برای مقادیر دلخواه و معلوم پارامتر شکل توزیع گاما تعمیم دادند. نعمت‌الهی و معتمدشریعتی [۸] به برآوردیابی پارامتر مقیاس جامعه گامای گزینش‌شده تحت تابع زیان آنتروپی پرداختند. در این مقاله، به برآوردیابی پارامتر مقیاس جامعه‌ی گامای گزینش‌شده تحت تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم‌یافته به فرم زیر:

$$L(\theta,\delta)=\left[\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{\frac{p}{2}}-\left(\frac{\theta}{\delta}\right)^{\frac{p}{2}}\right]^2=\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{p}+\left(\frac{\theta}{\delta}\right)^{p}-2=\Delta^p+\frac{1}{\Delta^p}-2 \tag{۳}$$

پرداخته می‌شود. شکل۱ تابع زیان (۳) را برای مقادیر انتخابی p نشان می‌دهد. تابع زیان (۳) یک تابع اکیداً محدب بوده و به عنوان تابعی از Δ دارای مینیمم یکتا در نقطه‌ی $\Delta=۱$ می‌باشد. همچنین برای مقادیر کوچک (بزرگ) p، تابع زیان، تابعی نامتقارن (متقارن) است.

در بخش دوم، تصمیم‌های پذیرفتنی θ_M و θ_J داده شده در رابطه (۲) را در کلاس برآوردگرهای ناوردا به فرم $cX_{(۲)}$ و $cX_{(۱)}$ به‌دست می‌آوریم. در بخش سوم، تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم‌یافته θ_M و θ_J را به‌دست می‌آوریم. یک محاسبه عددی برای مقایسه برآوردگرها در بخش ۴ انجام شده است. نتایج به‌دست آمده را با داده‌های سانسورشده نوع دوم و همچنین در توزیع‌های رایلی و وایبول به‌کار می‌بریم. در پایان به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.



شکل ۱. نمودار تابع زیان (۳) برای مقادیر مختلف p

۲ کلاس تصمیم‌های پذیرفتنی خطی

فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند به‌طوری که X_i، $i=۱,۲$ دارای تابع چگالی احتمال گاما داده شده در (۱) باشد. مساله برآورد پارامترهای تصادفی نامعلوم θ_M و θ_J تحت تابع زیان (۳) نسبت به گروه تبدیل‌های مقیاس و جایگشتی، ناوردا است؛ بنابراین طبیعی است تنها برآوردگرهای δ که ناوردای مقیاس و جایگشتی هستند، یعنی برآوردگرهایی را که در دو شرط زیر صدق می‌کنند مورد بررسی قرار دهیم.

۱) $\delta(X_۱,X_۲)=\delta(X_۲,X_۱)$,

۲) $\delta(cX_۱,cX_۲)=c\delta(X_۱,X_۲),\ c>۰$

فرض کنید $X_{(۲)}=\max(X_۱,X_۲)$ و $X_{(۱)}=\min(X_۱,X_۲)$ باشند. در این بخش، تصمیم‌های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی به فرم $cX_{(۲)}$ و $cX_{(۱)}$ در برآورد پارامترهای θ_M و θ_J را به ترتیب در زیرکلاس‌های $D_۱$ و $D_۲$ به فرم زیر به‌دست می‌آوریم:

$$D_۱=\left\{\delta_{۱c}:\delta_{۱c}\left(X_۱,X_۲\right)=cX_{(۲)},\ c>۰\right\},\ D_۲=\left\{\delta_{۲c}:\delta_{۲c}\left(X_۱,X_۲\right)=cX_{(۱)},\ c>۰\right\}$$

برای یافتن تصمیم‌های پذیرفتنی θ_M و θ_J در زیرکلاس‌های $D_۱$ و $D_۲$ لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱ فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل باشند بطوری که X_i، $i=1,2$ دارای تابع چگالی احتمال گاما داده شده در (۱) با $\alpha > p$ باشد. همچنین فرض کنید $S=\frac{X_{(2)}}{\theta_M}$ ، $U=\frac{X_{(1)}}{\theta_J}$، $\mu=\frac{\max(\theta_1,\theta_2)}{\min(\theta_1,\theta_2)}\geq 1$ و به ازای $a,b>0$ تعریف می‌کنیم $G_{a,b}(t)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^t x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ و $H_{a,b}(t)=G_{a,b}(t)+G_{a,b}(1-t)$ که در آن $B(0,0)$ تابع بتا است. دراین‌صورت:

الف. $E(S^k)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}H_{\alpha,\alpha+k}\left(\frac{1}{1+\mu}\right)$، که تابعی صعودی (نزولی) نسبت به μ به ازای $k<0$ $(k>0)$ می‌باشد.

ب. $E(U^k)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\left[2-H_{\alpha,\alpha+k}\left(\frac{1}{1+\mu}\right)\right]=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}H_{\alpha+k,\alpha}\left(\frac{1}{1+\mu}\right)$ که تابعی صعودی (نزولی) نسبت به μ به ازای $k>0$ $(k<0)$ می‌باشد.

اثبات: برای اثبات به نقی‌زاده قمی و همکاران [۹] مراجعه شود.

در قضیه‌ی زیر تصمیم‌های پذیرفتنی به فرم $cX_{(2)}$ در کلاس برآوردگرهای ناوردای D_1 را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۲ تصمیم‌های به فرم $\delta_{1c}(X_1,X_2)=cX_{(2)}$ در زیرکلاس D_1 از تصمیم‌های ناوردای θ_M، پذیرفتنی هستند اگر وتنها اگر $c\in[c_1^\star,c_2^\star]$، که درآن $\alpha>p$ ، $c_1^\star=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\frac{G_{\alpha,\alpha-p}(0/5)}{G_{\alpha,\alpha+p}(0/5)}\right]^{\frac{1}{2p}}$ و $c_2^\star=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\right]^{\frac{1}{2p}}$.

اثبات تابع مخاطره‌ی $\delta_{1c}(X_1,X_2)=cX_{(2)}$ عبارت است از:

$$R(\theta_M,cX_{(2)})=E\left(\left(c\frac{X_{(2)}}{\theta_M}\right)^p+\left(\frac{\theta_M}{cX_{(2)}}\right)^p-2\right)$$
$$=c^pE(S^p)+\frac{1}{c^p}E(S^{-p})-2$$

با قراردادن مشتق تابع مخاطره نسبت به c برابر صفر داریم:

$$\frac{\partial R(\theta_M,cX_{(2)})}{\partial c}=pc^{p-1}E(S^p)-pc^{-p-1}E(S^{-p})=0$$

در نتیجه $c=\left(\frac{E(S^{-p})}{E(S^p)}\right)^{\frac{1}{2p}}=c_1(\mu)$. با توجه به این که $\frac{\partial^2 R(\theta_M,cX_{(2)})}{\partial c^2}=\frac{2p^3}{c^{p+2}}E(S^{-p})>0$؛ بنابراین تابع مخاطره، مقدار مینیمم خود را به ازای مقدار $c_1(\mu)=\left(\frac{E(S^{-p})}{E(S^p)}\right)^{\frac{1}{2p}}$ اختیار می‌کند. با استفاده از قسمت الف لم۱ نتیجه می‌شود که $[E(S^p)]^{-1}$ و $E(S^{-p})$ توابعی پیوسته، صعودی و مثبت نسبت به μ هستند: بنابراین تابع $c_1(\mu)$ تابعی پیوسته و صعودی از μ بوده و داریم:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.1.2]

$$\inf_{\mu\geq ۱} c_۱(\mu)=c_۱(۱)=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+p)/\Gamma(\alpha)}\frac{H_{\alpha,\alpha-p}\left(\frac{۱}{۲}\right)}{H_{\alpha,\alpha+p}\left(\frac{۱}{۲}\right)}\right]^{\frac{۱}{۲p}},$$

$$=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\frac{G_{\alpha,\alpha-p}\left(\frac{۱}{۲}\right)}{G_{\alpha,\alpha+p}\left(\frac{۱}{۲}\right)}\right]^{\frac{۱}{۲p}}=c_۱^\star,$$

و

$$\sup_{\mu\geq ۱} c_۱(\mu)=\lim_{\mu\to\infty} c_۱(\mu)=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+p)/\Gamma(\alpha)}\frac{H_{\alpha,\alpha-p}(\circ)}{H_{\alpha,\alpha+p}(\circ)}\right]^{\frac{۱}{۲p}},$$

$$=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\right]^{\frac{۱}{۲p}}=c_۲^\star$$

بنابراین برای هر $c\in[c_۱^\star,c_۲^\star)$ ، یک $\mu\geq ۱$ وجود دارد که تابع مخاطره‌ی $R(\theta_M,cX_{(۲)})$ مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند و در نتیجه چنین cی متناظر با یک تصمیم‌های پذیرفتنی است. پذیرفتنی‌بودن $\delta_{c_۲^\star}$ از پیوسته‌بودن تابع مخاطره نتیجه می‌شود. همچنین برای هر $\mu\geq ۱$ ثابت، تابع مخاطره‌ی $R(\theta_M,cX_{(۲)})$ برای $c_۱(\mu)<c$ یک تابع صعودی از c و برای $c_۱(\mu)>c$ یک تابع نزولی از c است. چون برای هر $\mu\geq ۱$، $c_۱^\star\leq c_۱(\mu)\leq c_۲^\star$، نتیجه می‌شود که تصمیم‌های $\delta_{۱c}(X_۱,X_۲)=cX_{(۲)}$ برای $c\in(-\infty,c_۱^\star)\cup(c_۲^\star,\infty)$ در برآورد θ_M ناپذیرفتنی هستند، که این قضیه را کامل می‌کند.

در قضیه‌ی زیر تصمیم‌های پذیرفتنی به فرم $cX_{(۱)}$ را در کلاس برآوردگرهای ناوردای $D_۲$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۳ تصمیم‌های به فرم $\delta_{۲c}(X_۱,X_۲)=cX_{(۱)}$ در زیرکلاس $D_۲$از تصمیم‌های ناوردای θ_J، پذیرفتنی هستند اگر وتنها اگر $c\in[c_۲^\star,c_۳^\star]$، که درآن

$$c_۲^\star=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\right]^{\frac{۱}{۲p}},\quad c_۳^\star=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\frac{G_{\alpha-p,\alpha}(۰/۵)}{G_{\alpha+p,\alpha}(۰/۵)}\right]^{\frac{۱}{۲p}}$$

اثبات: تابع مخاطره‌ی $\delta_{۱c}(X_۱,X_۲)=cX_{(۲)}$ عبارت است از:

$$R(\theta_J,cX_{(۱)})=E\left(\left(c\frac{X_{(۱)}}{\theta_J}\right)^p+\left(\frac{\theta_J}{cX_{(۱)}}\right)^p-۲\right),$$

$$=c^pE(U^p)+\frac{۱}{c^p}E(U^{-p})-۲,$$

که تابعی اکیدا محدب نسبت به c و دارای مینیمم یکتا در $c = c_{۲}(\mu) = \left(\frac{E(U^{-p})}{E(U^{p})}\right)^{\frac{۱}{۲p}}$ می‌باشد. با استفاده از قسمت ب لم۱ نتیجه می‌شود که $[E(U^{p})]^{-۱}$ و $E(U^{-p})$ توابعی پیوسته، نزولی و مثبت نسبت به μ هستند؛بنابراین تابع $c_{۲}(\mu)$ تابعی پیوسته و نزولی از μ بوده و در نتیجه داریم:

$$\inf_{\mu \geq ۱} c_{۲}(\mu) = \lim_{\mu \to \infty} c_{۲}(\mu) = \left[\frac{\Gamma(\alpha-p)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+p)/\Gamma(\alpha)} \frac{H_{\alpha-p,\alpha}(۰)}{H_{\alpha+p,\alpha}(۰)}\right]^{\frac{۱}{۲p}},$$

$$= \left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\right]^{\frac{۱}{۲p}} = c_{۲}^{\star}$$

و

$$\sup_{\mu \geq ۱} c_{۱}(\mu) = c_{۱}(۱) = \left[\frac{\Gamma(\alpha-p)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+p)/\Gamma(\alpha)} \frac{H_{\alpha-p,\alpha}\left(\frac{۱}{۲}\right)}{H_{\alpha+p,\alpha}\left(\frac{۱}{۲}\right)}\right]^{\frac{۱}{۲p}},$$

$$= \left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)} \frac{G_{\alpha-p,\alpha}\left(\frac{۱}{۲}\right)}{G_{\alpha+p,\alpha}\left(\frac{۱}{۲}\right)}\right]^{\frac{۱}{۲p}} = c_{۳}^{\star}$$

با بحثی مشابه با اثبات قضیه ۲، اثبات کامل می‌شود.

۳ تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم‌یافته

در این بخش تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم‌یافته را برای پارامترهای θ_M و θ_J به دست می‌آوریم. با استفاده از روش ساکروویتز و ساموئل-کان [۱۰]، ابتدا تصمیم بیز را در حالت تک مولفه‌ای برای θ_i، $i = ۱,۲$ می‌یابیم.

با در نظر گرفتن توزیع پیشین مزدوج گامای وارونه برای θ_i، $i = ۱,۲$ به صورت $IGamma(\upsilon+\alpha, (x_i+\beta)^{-۱})$با تابع چگالی احتمال زیر:

$$\pi_i^{\upsilon,\beta}(\theta_i) = \frac{\beta^{\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)\theta_i^{\upsilon+۱}} e^{-\frac{\beta}{\theta_i}}, \quad \upsilon > ۰, \beta > ۰, i = ۱,۲. \qquad (۴)$$

توزیع پسین $\theta_i \mid X_i$ نیز گامای وارونه به‌صورت $IGamma(\upsilon+\alpha, (x_i+\beta)^{-۱})$است. تصمیم بیزی θ_i با توجه به پیشین (۴) و تحت تابع زیان (۳) برابر است با

$$\delta_{\upsilon,\beta}^{i}(X_i) = \left(\frac{E(\theta_i^{p} \mid X_i)}{E(\theta_i^{-p} \mid X_i)}\right)^{\frac{۱}{۲p}} = \left[\frac{\Gamma(\upsilon+\alpha-p)}{\Gamma(\upsilon+\alpha+p)}\right]^{\frac{۱}{۲p}} (X_i+\beta), \; i = ۱,۲. \qquad (۵)$$

حال فرض کنید θ_1 و θ_2 دارای پیشین‌های مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال (۴) باشند. از رابطه (۶) و لم ۳-۲ ساکروویتز و ساموئل-کان [۱۰]، تصمیم‌های بیز یکتای پارامترهای θ_M و θ_J تحت تابع زیان (۳) با توجه به توزیع پیشین $\pi^{\upsilon,\beta}=(\pi_1^{\upsilon,\beta},\pi_2^{\upsilon,\beta})$ به ترتیب عبارتند از:

$$\delta^1_{\upsilon,\beta}(X_1,X_2)=\left[\frac{\Gamma(\upsilon+\alpha-p)}{\Gamma(\upsilon+\alpha+p)}\right]^{\frac{1}{2p}}\left(X_{(2)}+\beta\right)$$

و

$$\delta^2_{\upsilon,\beta}(X_1,X_2)=\left[\frac{\Gamma(\upsilon+\alpha-p)}{\Gamma(\upsilon+\alpha+p)}\right]^{\frac{1}{2p}}\left(X_{(1)}+\beta\right)$$

همچنین توجه کنید که تصمیم بیزی حدی پارامترهای θ_M و θ_J یعنی $\delta^1_{0,0}(X_1,X_2)=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\right]^{\frac{1}{2p}}X_{(2)}$ و $\delta^2_{0,0}(X_1,X_2)=\left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)}\right]^{\frac{1}{2p}}X_{(1)}$ تصمیم‌های بیزی تعمیم‌یافته θ_M و θ_J با توجه به پیشین ناآگاهی‌بخش $\pi(\theta_1,\theta_2)=(\theta_1\theta_2)^{-1},\ \ \theta_1,\theta_2\in\Re^+$ هستند.

پیامد ٤ فرض کنید $\mathbf{X}_i=(X_{i1},X_{i2},\ldots,X_{in})$، $i=1,2$ یک زوج نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه Π_i، $i=1,2$ باتابع چگالی داده شده در (۱) باشند. در نتیجه $T_j\left(\mathbf{X}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}X_{ij}$، $i=1,2$ یک آماره بسنده کامل برای θ_i است و همچنین دارای توزیع گاما با پارامترهای $n\alpha$ و θ_i می‌باشد. بنابراین تمام نتایج بخش‌های ۲ و ۳ با جایگذاری $n\alpha$ به جای α و $T_i\left(\mathbf{X}_i\right)$ به جای X_i برقرار خواهند بود.

٤ محاسبات عددی

در این بخش به مقایسه مخاطره برآوردگر ماکسیمم درستنمایی (ML) و تصمیم بیز تعمیم‌یافته (GB) برای پارامتر θ_M می‌پردازیم. جدول ۱ مقادیر مخاطره ML و GB را برای مقادیر انتخابی $\alpha=2$، $p=1$، $\mu=0/1(0/1)1$ و $n=10,30,50$ نشان می‌دهد. از جدول ۱ مشاهده می‌شود که تصمیم GB دارای مخاطره کم‌تری نسبت به ML می‌باشد. همچنین با افزایش n از میزان مخاطره تصمیم‌ها کاسته می‌شود.

٥ کاربرد در داده‌های سانسورشده نوع دوم

در بسیاری از مطالعات پزشکی و صنعتی به زمان یا مرحله‌ای می‌رسیم که بعد از آن دیگر قادر به مشاهده یا ثبت واقعه‌ی مورد نظر نخواهیم بود. به این مرحله یا زمان، مرحله یا زمان سانسور می‌گویند. سانسور از راست زمانی رخ می‌دهد که واقعه‌ی مورد نظر پس از زمان یا مرحله‌ی سانسور رخ دهد که ما قادر به ثبت آن نبوده و فقط می‌توانیم بگوییم که تا زمان یا مرحله‌ای مشخص (زمان یا مرحله‌ی سانسور) آن واقعه رخ نداده است. این سانسور

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.1.2]

براساس نوع زمانی یا مرحله‌ای‌بودن سانسور به دو نوع اول و دوم تقسیم می‌شود، که این‌دو نیز هر کدام براساس نوع تعیین زمان یا مرحله‌ی سانسور خود به انواع مختلفی تقسیم می‌شوند. یکی از پرکاربردترین انواع سانسور از راست، سانسور نوع دوم می‌باشد.

جدول ۱. مخاطره برآوردگر ML و GB برای مقادیر مختلف حجم نمونه

μ	$n=10$		$n=30$		$n=50$	
	MLE	GBE	MLE	GBE	MLE	GBE
۰/۱	۰/۳۷۷۱	۰/۲۴۷۷	۰/۱۶۷۱	۰/۱۴۲۸	۰/۱۰۰۱	۰/۰۹۰۹
۰/۲	۰/۳۵۱۳	۰/۲۳۹۶	۰/۱۶۷۸	۰/۱۴۲۰	۰/۱۰۰۲	۰/۰۹۰۸
۰/۳	۰/۳۷۱۶	۰/۲۲۹۱	۰/۱۷۱۵	۰/۱۳۹۲	۰/۱۰۰۲	۰/۰۹۰۷
۰/۴	۰/۳۸۹۹	۰/۲۱۸۲	۰/۱۷۷۸	۰/۱۳۴۲	۰/۱۰۰۶	۰/۰۹۰۴
۰/۵	۰/۴۰۶۳	۰/۲۰۸۹	۰/۱۸۵۲	۰/۱۲۹۲	۰/۱۰۲۳	۰/۰۸۸۹
۰/۶	۰/۴۱۹۲	۰/۲۰۱۷	۰/۱۹۲۲	۰/۱۲۴۱	۰/۱۰۹۲	۰/۰۸۴۶
۰/۷	۰/۴۲۸۳	۰/۱۹۶۷	۰/۱۹۷۸	۰/۱۲۰۱	۰/۱۱۲۸	۰/۰۸۳۲
۰/۸	۰/۴۳۳۷	۰/۱۹۳۵	۰/۲۰۱۶	۰/۱۱۷۲	۰/۱۱۵۶	۰/۰۸۰۳
۰/۹	۰/۴۳۶۶	۰/۱۹۱۸	۰/۲۰۳۶	۰/۱۱۵۷	۰/۱۱۷۱	۰/۰۷۸۰
۱	۰/۴۳۷۵	۰/۱۹۱۴	۰/۲۰۴۳	۰/۱۱۵۲	۰/۱۱۷۶	۰/۰۷۶۷

سانسور نوع دوم اغلب در انجام آزمون‌های طول عمر به کار می‌رود. در مجموعه نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم، r کوچک ترین مشاهدات از یک نمونه‌ی تصادفی n تایی قابل مشاهده هستند. به عبارت دیگر تمام n عضو نمونه در آزمایش قرار می‌گیرند؛ اما به جای انجام آزمایش تا پایان ازکارافتادگی تمامی اعضای نمونه، این کار را تا زمانی انجام می‌دهیم که r عضو از کار بیفتد. این کار موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه‌های آزمایش خواهد شد.

باید توجه کرد که در این نوع سانسور، تعداد مشاهدات لازم یعنی r مقداری ثابت است و پیش از شروع آزمایش تعیین می‌شود، اما طول دوره‌ی آزمایش یک متغیر تصادفی است.

فرض کنید $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in})$، $i = 1,2$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از جامعه‌های نمایی Π_1 و Π_2 با تابع چگالی احتمال (۱) به ترتیب با پارامترهای مقیاس نامعلوم θ_1 و θ_2 و پارامتر شکل معلوم و مشترک $\alpha = 1$ باشند. فرض کنید $X_{i(j)}$، j امین آماره‌ی ترتیبی X_i، $i = 1,2$، باشد. متغیر تصادفی $TT_i = \sum_{j=1}^{r} X_{i(j)} + (n-r) X_{i(r)}$، $i = 1,2$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه ۴-۱-۱ صفحه ۱۵۳ لاولس([۱۱]) ، TT_i، $i = 1,2$، دارای توزیع گاما با پارامترهای r و θ_i است. فرض کنید $TT_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ و $TT_{(2)} = \max(X_1, X_2)$ باشد. جامعه‌ی متناظر با $TT_{(2)}$ ($TT_{(1)}$) را گزینش می‌کنیم. علاقه مند به برآورد پارامترهای تصادفی θ_M و θ_J تعریف شده به صورت زیر هستیم:

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & TT_1 \geq TT_2 \\ \theta_2 & TT_1 < TT_2 \end{cases}, \qquad \theta_J = \begin{cases} \theta_1 & TT_1 \leq TT_2 \\ \theta_2 & TT_1 > TT_2. \end{cases}$$

چون TT_i، $i=1,2$، دارای توزیع گاما با پارامترهای r و θ_i است ، می‌توان نتایج بخش‌های ۲ و ۳ را با جایگزینی α با r و X_i با TT_i، $i=1,2$ با استفاده از داده‌های سانسورشده (سانسور راست از نوع دوم)، به کار برد.

۶ کاربرد در توزیع‌های وایبول و رایلی

فرض کنید $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ یک نمونه سانسور شده از توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال

$$\delta^i_{\upsilon,\beta}(X_i) = \left(\frac{E(\theta_i^p \mid X_i)}{E(\theta_i^{-p} \mid X_i)}\right)^{\frac{1}{2p}} = \left[\frac{\Gamma(\upsilon+\alpha-p)}{\Gamma(\upsilon+\alpha+p)}\right]^{\frac{1}{2p}} (X_i+\beta),\ i=1,2. \tag{۶}$$

باشند که در آن v پارامتر شکل معلوم و θ پارامتر مقیاس نامعلوم باشند. در این‌صورت $X=Y^v$ دارای توزیع نمایی با پارامتر θ خواهد بود. زمان کل آزمایش برابر است با

$$S_r = \sum_{i=1}^{r} y_{(i)}^{v} + (n-r) y_{(r)}^{v},\ \ n>r.$$

و یک برآوردگر نااریب برای θ برابر است با $S^* = S_r / r$. همچنین $2S_r/\theta \sim \chi^2_{2r}$. همچنین دقت کنید که توزیع رایلی از توزیع وایبول به ازای $v=2$ به‌دست می‌آید. در این صورت علاقه مند به برآورد پارامترهای تصادفی θ_M و θ_J تعریف شده به صورت زیر:

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & S_1 \geq S_2 \\ \theta_2 & S_1 < S_2 \end{cases},$$

و

$$\theta_J = \begin{cases} \theta_1 & S_1 \leq S_2 \\ \theta_2 & S_1 > S_2 \end{cases}$$

هستیم: بنابراین تمام نتایج مطرح شده در بخش‌های قبل برای نمونه سانسور از توزیع وایبول با پارامتر شکل معلوم v و توزیع رایلی برقرار خواهد بود.

۷ بحث و نتیجه‌گیری

هدف از این مقاله، تصمیم‌سازی بهینه برای پارامترهای مقیاس θ_M و θ_J از جامعه گامای گزینش‌شده تحت یک تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم‌یافته می‌باشد. تصمیم‌های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی به فرم $cX_{(1)}$ یا $cX_{(2)}$ در زیرکلاسی از تصمیم‌های ناوردای θ_M یا θ_J به‌دست آمدند. همچنین تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم‌یافته θ_M و θ_J محاسبه شدند که همانگونه که بیان شد تصمیم‌های خطی پذیرفتنی بودند. سپس کاربردی از نتایج با داده‌های سانسورشده نوع دوم بیان شد. یکی از تصمیم‌های بهینه که در نظریه تصمیم آماری مورد توجه است، تصمیم‌های

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.1.2]

مینیماکس می‌باشد. یافتن برآوردگرهای مینیماکس بـرای پارامترهـای θ_M و θ_J بـه عنـوان یـک مسـاله بـاز بـاقی می‌ماند.

سپاسگزاری

نویسندگان مقاله از حمایت‌های مالی و معنوی دانشگاه آزاد بابل بابت به پایان رساندن طرح تحقیقاتی که منجر بـه یافته‌های مقاله حاضر شده است کمال تشکر و قدردانی را دارند.

منابع

[۱] فیاض موقر، ا.، محمودی، ز.، (۱۳۹۴). استنباط آماری براساس برآوردگر گشتاوری وزنی احتمالی تعدیل‌یافته. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۷، ۸۷–۷۹.

[2] Misra, N., Van Der Meulen, E. C., Branden, K.V., (2006a). On some inadmissibility results for the scale parameters of selected gamma populations. Journal of Statistical Planning and Inference, 136, 2340-2351.

[3] Kumar, S., Mahapatra, A. K., Vellaisamy, P., (2009). Reliability estimation of the selected exponential populations. Statistics and Probability Letters, 79, 1372-1377.

[4] Naghizadeh, M., Namatollahi, N., Parsian, A., (2012). Estimation after selection under reflected normal loss function. Communications in Statistics-Theory and Methods, 41,1040-1051.

[5] Vellaisamy, P., Sharma, D., (1989). A note on the estimation of the mean of the selected gamma population. Communications in Statistics-Theory and Methods, 18(2), 555-560.

[6] Vellaisamy, P., (1992). Inadmissibility results for the selected scale parameter. Annals of Statistics. 20, 2183-2191.

[7] Misra, N., van der Meulen, E. C., Branden, K. V., (2006b). On estimating the scale parameter of the selected gamma population under the scale invariant squared error loss function. Journal of Computational and Applied Mathematics, 186, 268-282.

[8] Nematollahi, N., Motamed-Shariati, F., (2009). Estimation of the scale parameter of the selected gamma population under the entropy loss function. Communications in Statistics-Theory and Methods, 38, 208-221.

[9] Naghizadeh, M., Namatollahi, N., Parsian, A., (2010). On estimation following selection with applications in k-Records and censored data, JIRSS, 9(2), 59-79.

[10] Sackrowitz, H., Cahn, E. S., (1987). Evaluating the chosen population: a Bayes and minimax approach. IMS Lecture Notes-Monograph Sereis: Adaptive Statistical Procedures and Related Topics 8, 386-395.

[11] Lawless, J. F., (2003). Statistical models and methods for lifetime data. John Wiley, New York.